

Dirac-Gleichung - Freie Elektronen

Zusammenfassung zur Präsentation vom 12.12.2014 von Patrick Köber

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation	1
1.1 Wiederholung: Spezielle Relativitätstheorie	2
1.2 Klein-Gordon-Gleichung	3
2 Die Dirac-Gleichung	4
2.1 Forderungen an die Dirac-Gleichung (DE)	4
2.2 Formulieren der Dirac-Gleichung	5
2.3 Kontinuitätsgleichung	6
2.4 Lorentzkovariante Form der Dirac-Gleichung	6
3 Beschreibung eines freien Teilchens	8
3.1 Lösung für ein freies Teilchen	8
3.2 Interpretation der negativen Energien	9
4 Quellen	10

1 Motivation

Als Erwin Schrödinger im Jahr 1926 die Schrödingergleichung (SE) (wir betrachten hier nur den kräftefreien Fall)

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t)$$

aufstellte, war ihm bewusst, dass diese nicht lorentskovariant ist. Das heißt sie verändert ihre Form unter Lorentztransformationen(LT). LT's beschreiben das Transformationsverhalten innerhalb der Speziellen Relativitätstheorie(SRT). Da man in der Natur und auch in Experimenten häufig auf hochenergetische Teilchen mit relativistischen Geschwindigkeiten trifft, ist es bestrebenswert, eine relativistisch korrekte Quantenmechanik zu formulieren.

Um dies zu verstehen und auch für die nachfolgenden Betrachtungen, ist es an dieser Stelle hilfreich, einen kurzen Einblick in die Spezielle Relativitätstheorie zu machen.

1.1 Wiederholung: Spezielle Relativitätstheorie

In der SRT sind Raum und Zeit nicht mehr absolut und die Messung dieser Größen hängt davon ab, wie man sich relativ zu einem Bezugssystem bewegt. Eleganter formulieren lässt sich die SRT im 4-dimensionalen Minkowski-Raum. Die Metrik wird beschrieben durch den metrischen Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Innerhalb der Metrik werden Größen durch sogenannte kovariante a_μ und kontravariante a^μ Vektoren beschrieben. Das Skalarprodukt ist definiert durch

$$a^\mu g_{\mu\nu} a_\nu = a_\mu a^\mu$$

wobei die Einsteinsche Summenkonvention verwendet wurde. Eine Raum-Zeit-Koordinate wird beschrieben durch den kontra- bzw. kovarianten Vektor

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad x_\mu = (ct, -\vec{x})$$

mit $\vec{x} = (x, y, z)$.

Eine Lorentztransformation $\Lambda^\mu{}_\nu$ beschreibt nun, wie diese Koordinaten bei einem Wechsel des Bezugssystem lauten

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x_\nu$$

Einen vierkomponentigen Vektor bezeichnet man als Lorentzvektor, wenn das Quadrat des Vektors invariant unter Lorentztransformationen ist. Wie z.B. das Abstandsquadrat $s^2 = x_\mu x^\mu$. Ein Beispiel für eine LT ist der Wechsel in ein Bezugssystem, das sich relativ zum ungestrichen System mit der Geschwindigkeit v in x -Richtung bewegt

$$x^{\mu'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x^\mu$$

mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$ und $\beta = v/c$.

Die symmetrische Transformation von Raum und Zeit macht es an dieser Stelle recht klar, dass die Schrödingergleichung nicht lorentzkovariant sein kann, da die Orts- und Zeitableitung in unterschiedlicher Ordnung auftreten.

Weiterhin für nachfolgende Betrachtungen wichtig ist der lorentzinvariante D'Alembert-Operator

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu$$

mit dem Gradientenoperator $\partial_\mu = (\frac{\partial}{\partial ct}, \nabla)$ bzw. $\partial^\mu = (\frac{\partial}{\partial ct}, -\nabla)$.

Die Energie und der Impuls werden zu einem Lorentzvektor, dem Vierer-Impuls

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right)$$

zusammengefasst. Es gilt

$$p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = (mc)^2 \iff E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4$$

Dies ist die relativistische Energie-Impuls-Beziehung mit der Ruhemasse m .

1.2 Klein-Gordon-Gleichung

Man kann sich auch am Korrespondenzprinzip klar machen, dass die Schrödingergleichung die SRT nicht berücksichtigt. Denn der Ausgangspunkt ist bei der SE die nicht-relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$$

und nach dem Korrespondenzprinzip werden die Größen E und p durch die Operatoren $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ und $-i\hbar \nabla$ ersetzt:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{x}, t)$$

Daher schlug Erwin Schrödinger 1926 als relativistische Erweiterung seiner Gleichung vor, das Korrespondenzprinzip bei der rel. Energie-Impuls-Beziehung anzuwenden

$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4 \longrightarrow -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi(x^\mu)}{\partial t^2} = (-c^2 \hbar^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi(x^\mu) \iff \left(\frac{m^2 c^2}{\hbar^2} + \square\right) \psi(x^\mu) = 0$$

Dies ist die (freie) Klein-Gordon-Gleichung (KGE), benannt nach dem schwedischen Physiker Oskar Benjamin Klein und dem deutschen Physiker Walter Gordon, die diese Gleichung im Detail untersuchten. Sie ist lorentzkovariant, da Skalare und der D'Alembert Operator invariant unter LT's sind. Die quadratische Form der E-I-Beziehung wird deshalb verwendet, weil sonst die Ortsableitung unter der Wurzel steht und Ort und Zeit somit wieder unsymmetrisch auftreten würden. Die Lösung der freien KGE ist

$$\psi(x^\mu) = e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})/\hbar}$$

mit $E = \pm \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4}$.

Das heißt, negative Energien sind erlaubt. Dies ist problematisch, da ein Universum mit nach unten unbeschränkter Energie instabil wäre. Teilchen würde durch Strahlungsabgabe in immer niedrigere Energiezustände fallen. Eine physikalisch sinnvolle Interpretation blieb somit zunächst aus. Die Lösung ist skalar und ist daher nur für die Beschreibung von Spin-0-Teilchen geeignet. Analog zur SE lässt sich auch aus der KGE eine Kontinuitätsgleichung der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \vec{j} = 0$$

herleiten. Bei der SE gilt diese mit der Dichte

$$\rho = |\psi(\vec{x}, t)|^2$$

und dem Dichtestrom

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^\dagger \nabla \psi - \psi \nabla \psi^\dagger)$$

Die positiv definite Dichte erlaubt die Wahrscheinlichkeitsinterpretation in der nichtrel. QM.

Bei der KGE erhält man eine der SE entsprechenden Stromdichte

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^\dagger \nabla \psi - \psi \nabla \psi^\dagger)$$

Für die Dichte erhält man

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}(\psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi)$$

Die Dichte kann hier auch negative Werte annehmen, womit die Wahrscheinlichkeitsinterpretation für ein Teilchen nicht zulässig ist. Bei näherer Betrachtung stellt sich heraus, dass ρ als Ladungsverteilung interpretiert, physikalisch sinnvoll ist, da es ja auch negative Ladungen gibt und die Lösungen entweder positiv oder negativ bleiben. Auf dies wird hier nicht näher eingegangen, da wir uns mit Spin-1/2-Teilchen, wie das Elektron beschäftigen wollen. Eine Erweiterung der KGE(wie bei der SE zur Pauligleichung), die auch den Spin beschreibt, wurde nämlich hier nicht gefunden. Dies führt uns zur Dirac-Gleichung.

2 Die Dirac-Gleichung

2.1 Forderungen an die Dirac-Gleichung (DE)

Paul Dirac wollte eine relativistische Verallgemeinerung der SE und dabei die mit der KGE verbundenen Probleme vermeiden. Dazu stellte er folgende Forderungen an seine Gleichung:

- Die Prinzipien der nichtrelativistischen QM sollten erhalten bleiben, das heißt insbesondere auch, dass es ein positiv definites $\rho = \psi^\dagger \psi$ gibt. Um dieser Forderung zu genügen, sollte die Gleichung von erster Ordnung in der Zeit sein.
- Es soll analog zum Hamiltonoperator in der Schrödingergleichung ein hermitescher Dirac-Operator H_D existieren, sodass die Gleichung die Form

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = H_D \psi(x)$$

hat. (Hamiltonsche Form)

- Damit die Gleichung lorentzkovariant ist, muss auch die Raumbewertung von erster Ordnung sein.

- Die relativistische Energie-Impuls Beziehung muss sich aus der Dirac-Gleichung ableiten lassen können, das heißt man muss sie in die KGE überführen können.
- Aus der DE muss sich eine lorentzkovariante Kontinuitätsgleichung ableiten lassen können.

2.2 Formulieren der Dirac-Gleichung

Es erweist sich folgender Ansatz als sinnvoll:

$$H_D = c\alpha_i \hat{p}_i + c^2$$

wobei $\hat{p}_i = -i\hbar\nabla_i$. Fordert man

$$H_D^2 = c^2 \hat{p}^2 + c^4$$

wird klar, dass α und β keine gewöhnliche Zahlen sein können, sondern n-dimensionale hermitesche Matrizen. Durch zweimaliges Anwenden des Dirac-Operators lassen sich folgende Bedingungen für α und β herleiten:

a) $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}I_n$

b) $\{\beta, \alpha_i\} = 0$

c) $\beta^2 = \alpha_i^2 = I_n$

Mit der n-dimensionalen Einheitsmatrix I_n und dem Antikommutator $\{a, b\} = ab + ba$ Aus Bedingung c) folgt für die Eigenwerte

$$EW(\alpha_i) = \pm 1 \quad EW(\beta) = \pm 1$$

Benutzt man die Zyklizität der Spur und die Bedingung b), so findet man

$$tr(\alpha_i) = tr(\beta^2 \alpha_i) = tr(\beta \alpha_i \beta) = -tr(\alpha_i) = 0$$

Da die Summe der Eigenwerte gleich der Spur einer Matrix ist, folgt, dass die Dimension der Matrizen gerade ist. N=2 ist nicht möglich, da sich hier maximal drei antikommütierende Matrizen finden lassen, nämlich die Pauli Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

N=4 ist die kleinstmögliche Dimension, mit der die Bedingungen erfüllt werden. Eine mögliche Darstellung der Matrizen ist die Dirac-Darstellung

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$$

Somit lautet die Dirac Gleichung in hamiltonscher Form

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = (c\alpha_i \hat{p}_i + \beta mc^2)\psi(x)$$

Sie wurde 1928 von Paul Dirac entwickelt.

Die Lösung ist wegen der Struktur der Gleichung nicht skalar, sondern ein vierkomponentiger Spinor

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}$$

2.3 Kontinuitätsgleichung

Zunächst definieren wir den adjungierten Spinor, der die adjungierte Dirac-Gleichung löst:

$$\psi^\dagger(x) = (\psi^*_{*1}, \psi^*_{*2}, \psi^*_{*3}, \psi^*_{*4})$$

Wir wollen ein ρ der Form $\rho = \psi^\dagger \psi$. Dazu multiplizieren wir die DE links mit ψ^\dagger

$$i\hbar \psi^\dagger(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = -\frac{\hbar c}{i} \psi^\dagger(x) \alpha_i \partial_i \psi(x) + \psi^\dagger \beta \psi(x) mc^2$$

und die adjungierte DE rechts mit ψ

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger(x)}{\partial t} \psi(x) = -\frac{\hbar c}{i} \partial_i \psi^\dagger(x) \alpha_i \psi(x) + \psi^\dagger(x) \beta \psi(x) mc^2$$

Ziehen wir die zweite von der ersten Gleichung ab und multiplizieren mit $\frac{1}{i\hbar}$ erhalten wir die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \vec{j} = 0$$

mit

$$\vec{j} = c\psi^\dagger \alpha_i \psi \quad \rho = \psi^\dagger \psi = \sum_i |\psi_i|^2 \geq 0$$

Somit ist die Interpretation der Dichte als Wahrscheinlichkeitsverteilung erlaubt, was eine der Forderungen von Dirac war.

2.4 Lorentzkovariante Form der Dirac-Gleichung

Um die Symmetrie zwischen Raum und Zeit in der Dirac-Gleichung zu untersuchen, ist es nützlich, die Gamma-Matrizen einzuführen. Sie sind definiert durch

$$\gamma^0 = \beta \quad \gamma^i = \beta \alpha_i$$

Diese genügen der Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\gamma^\mu)^2 = g^{\mu\mu}$$

Außerdem gilt

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$$

In der Dirac-Darstellung lauten die Gamma-Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

Die Dirac-Gleichung lautet nach kurzer Umformung somit

$$(-i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar})\psi(x) = 0$$

Dies ist sogenannte lorentzkovariante Form der DE. Nun wurde noch nicht explizit gezeigt, dass die Dirac-Gleichung tatsächlich lorentzkovariant ist. Dies wird im Rahmen dieser Zusammenfassung auch nicht behandelt (für weiterführende Literatur, siehe Quellen). Um aber einen kurzen Einblick zu bekommen, wird im Folgenden kurz gezeigt, was eigentlich genau gesucht wird. Wir betrachten zwei Inertialsysteme K und K' . In K werde ein Teilchen durch die DE mit der Lösung $\psi(x^\mu)$ beschrieben. Die DE ist jetzt genau dann lorentzkovariant, wenn es eine Überführung

$$\psi'(x'^\mu) = \psi'(\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu) = D(\Lambda^\mu{}_\nu)\psi(x^\mu)$$

in das gestrichene System gibt, so dass die gestrichene Lösung die gestrichene DE erfüllt. $D(\Lambda^\mu{}_\nu)$ bezeichnet man als Bispinortransformation und es wird angenommen, dass sie linear ist, da auch die LT $\Lambda^\mu{}_\nu$ linear ist. Man kann o.B.d.A. annehmen, dass die Gamma-Matrizen im gestrichenen System die selbe Darstellung wie im ungestrichenen System haben, da sich die verschiedenen Darstellungen nur durch eine unitäre Transformation unterscheiden, die Eigenschaften bleiben aber gleich. Außerdem gilt $\partial'_\mu = \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu$. Ersetzt man in der gestrichenen Dirac-Gleichung die gestrichenen Größen durch die ungestrichenen, erhält man also

$$(i\gamma^\mu \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x^\nu - \frac{mc}{\hbar})D(\Lambda^\mu{}_\nu)\psi(x) = 0$$

Multipliziert man $D^{-1}(\Lambda^\mu{}_\nu) := D((\Lambda^\mu{}_\nu)^{-1})$ von links, erhält man die Bedingung

$$D^{-1}(\Lambda^\mu{}_\nu)\gamma^\mu(\Lambda^\mu{}_\nu)^{-1} = \gamma^\nu$$

3 Beschreibung eines freien Teilchens

3.1 Lösung für ein freies Teilchen

Es ist instruktiv, zunächst die Lösung für ein ruhendes Teilchen anzusehen. Da hier die Ortsableitungen wegfallen, lautet die DE:

$$(-i\gamma^0\partial_0 + m)\psi(x) = 0$$

wobei c und \hbar gleich Eins gesetzt wurden.

Die Lösungen lauten

$$\psi_r^+(x) = u_r(m, 0)e^{-imt} \quad \psi_r^-(x) = v_r(m, 0)e^{imt}$$

mit $r = 1, 2$ und

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit den Eigenwerten des Dirac-Operators $\pm m$. Der Betrag ist wie erwartet die Ruheenergie, aber es treten auch hier wieder negative Energien auf, wie bei der KGE. Die Interpretation wird im nächsten Unterpunkt diskutiert.

Außerdem fällt auf, dass es jeweils zwei Lösungen für die negative und positive Energie gibt. Das heißt, es gibt einen inneren Freiheitsgrad in der Lösung. Man kann schon vermuten, dass dieser gerade der Spin ist. Bemerkenswert ist, dass wir dies bei der Herleitung nicht direkt gefordert haben. Allein durch die Berücksichtigung der Anforderungen von Dirac ergibt sich dieser Freiheitsgrad von selbst. Die Schrödingergleichung musste man dagegen zur Pauli-Gleichung erweitern.

Für die Herleitung der Lösung für ein bewegtes Teilchen, führen wir noch die Feynman-Slash-Notation ein. Sie ist wie folgt definiert:

$$\not{A} = \gamma^\mu A_\mu$$

Wobei A_μ ein Lorentzvektor ist und γ^μ die Gamma-Matrizen. Somit lautet die DE ($\hbar = c = 1$):

$$(-i\not{\partial} + m)\psi = 0$$

Wir machen die Ansätze für positive und negative Energien

$$\psi_r^+ = u_r(m, \mathbf{p})e^{-ipx} \quad \psi_r^- = v_r(m, \mathbf{p})e^{ipx}$$

Hierbei ist $px := p^\mu x_\mu$.

Eingesetzt in die DE erhalten wir also

$$(\not{p} - m)u_r(m, \mathbf{p}) = 0 \quad (\not{p} + m)v_r(m, \mathbf{p}) = 0$$

Nutzt man nun aus, dass

$$(\not{p} - m)(\not{p} + m) = 0$$

gilt, erhält man

$$u_r(m, \mathbf{p}) = (\not{p} + m)u_r(m, 0) \quad v_r(m, \mathbf{p}) = (\not{p} - m)v_r(m, 0)$$

Die normierten Lösungen lauten nun

$$\psi_r^+(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \chi_r \\ \frac{\sigma \mathbf{p}}{\sqrt{2m(m+E)}} \chi_r \end{pmatrix} e^{-ipx} \quad \psi_r^-(x) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma \mathbf{p}}{\sqrt{2m(m+E)}} \chi_r \\ \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \chi_r \end{pmatrix} e^{ipx}$$

mit

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \sigma \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

E ist die Gesamtenergie und m die Ruheenergie.

3.2 Interpretation der negativen Energien

Würde man ein isoliertes Teilchen beschreiben wollen, müsste man postulieren, dass die negativen Energieniveaus nicht besetzt werden. Die Beschreibung von Elektronen mit positiven Lösungen stimmen hervorragend mit den Experimenten überein.

Berücksichtigt man aber die Wechselwirkung mit Strahlungsfelder, so kommt man wieder zu der Schlussfolgerung, die wir schon bei der Klein-Gordon-Gleichung hatten. Durch Energie-Abgabe würden die Elektronen in immer tiefere Niveaus sinken, da die Energie nicht nach unten beschränkt ist.

Paul Dirac veröffentlichte 1930 einen Ausweg, der zur nicht nur das Instabilitäts-Problem löste, sondern auch eine bahnbrechende Vorhersage beinhaltet.

Er nahm an, dass das Vakuum nicht strukturlos ist, sondern dass alle negativen Energiezustände durch Elektronen im Vakuum besetzt sind (Dirac-See). Das Paulische Ausschließungsprinzip verhindert nun, dass die Elektronen mit positiven Energien in diesen Dirac-See hinab fallen.

Wenn nun ein Photon auf ein Elektron mit negativer Energie trifft, sodass es zu einem positiven Energiezustand wechselt, bleibt im Dirac-See eine negative Energie unbesetzt und die Ladung hat sich im Vergleich zu vorher um $-(-e_0) = +e_0$ verändert. Dieses "Loch" positiver Energie und positiver Ladung ist gerade das Antiteilchen des Elektrons. Umgekehrt kann ein Elektron durch Abgabe von Photonen in so ein Loch fallen, was dann zur Auslöschung von einem Elektron-Positron-Paar führt (Annihilation).

Innerhalb dieses Modells treten allerdings offene Fragen auf. Woher kommt zum Beispiel die Asymmetrie zwischen Elektronen und Positronen?

Ein weiteres großes Problem zeigt sich bei folgender Überlegung. Lokalisiert man ein Elektron nur genau genug, so ergibt sich wegen der Heisenberg'schen Unschärferelation eine große Impulsunschärfe und damit auch eine Energieunschärfe, die groß genug ist, um neue Teilchen zu erzeugen.

Eine konsistente Ein-Teilchen-Beschreibung ist also nicht möglich und lässt erahnen, warum Vielteilchentheorien wie die Quantenelektrodynamik die Einteilchentheorien ersetzen mussten.

Trotzdem oder eben gerade deswegen, durch das Aufwerfen dieser Fragen, ist die Dirac-Gleichung ein wichtiger Meilenstein in der Physik und natürlich auch wegen der Vorhersage des Positrons, welches dann 1932 vom US-amerikanischen Physikers Carl David Anderson 1932 entdeckt wurde.

4 Quellen

- Schwabl: Quantenmechanik für Fortgeschrittene
- G. Wolschin: RQM-Skript
- Wachter: Relativistische Quantenmechanik