

Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld

Christian Hensel

25. Januar 2017

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
1.1	Einordnung	2
1.2	Klassische Elektrodynamik	2
2	Geladenes Teilchen im EM Feld	3
2.1	H: Freies Teilchen, Wechselwirkung	3
2.2	H: Wechselwirkungsterm	3
3	Freies Strahlungsfeld	3
3.1	Analogie zum eindimensionalen harmonischen Oszillator	3
3.2	H_{Str} ausgedrückt durch Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren	4
3.3	Zusammenfassung	5
4	Zeitabhängige Störung	5
4.1	Wechselwirkungsbild	5
4.2	Zeitabhängige Störung	6
4.3	Übergänge 1. Ordnung	6
4.4	Fermis Goldene Regel	7
4.5	Periodische Störungen	8
5	Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld	8
5.1	Emission und Absorption	8
5.2	Laser	9

1 Einleitung

1.1 Einordnung

Der Begriff „Strahlungsfeld“ ist definiert als Überlagerungen von Elektromagnetischen Wellen. Mit dem Photoeffekt wurde gezeigt das diese Strahlung quantisiert ist. Ziel dieser Arbeit ist die Wechselwirkung mit dem quantisierten Strahlungsfeld zu Verstehen. Dazu werden wir Absorptions- und Emissionsvorgänge betrachten. Diese kennen wir schon aus der quantenmechanischen Beschreibung des Wasserstoff Atoms, hier wollen wir aber aus der Sicht des Strahlungsfeldes argumentieren.

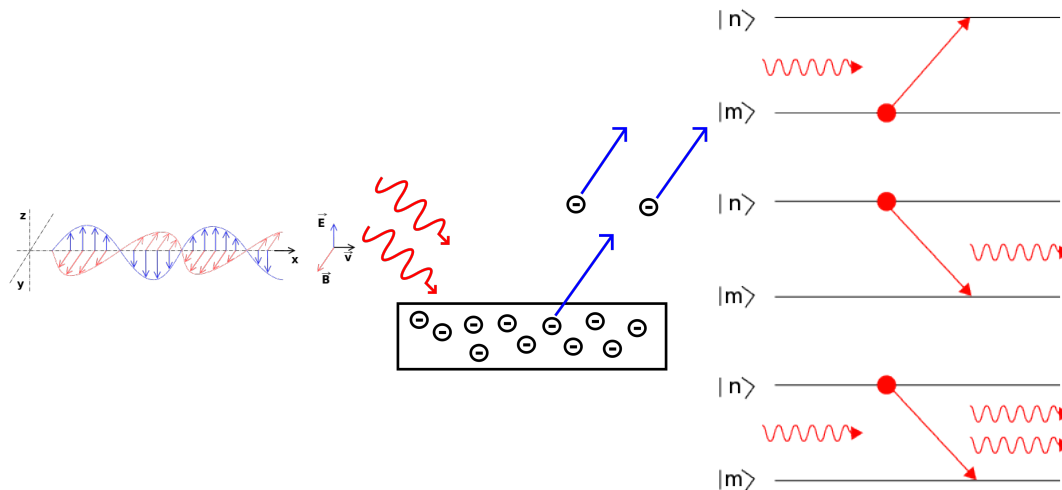


Abbildung 1:

links linear polarisierte elektromagnetische Welle [1]

mitte Schematische Darstellung photoelektrischer Effekt [2]

rechts Absorption und Emission

1.2 Klassische Elektrodynamik

In dem folgenden Kapitel möchte ich zunächst an die klassische Beschreibung des Elektrodynamik erinnern.

Homogene Maxwell-Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

aus (1) folgt das wir ein Vektorpotential definieren dürfen:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad (3)$$

in (2) eingesetzt:

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4)$$

analog können wir auch ein Skalares Potential definieren:

$$\nabla \phi = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (5)$$

Die Inhomogene Maxwell-Gleichungen lauten:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7)$$

aus (3) folgt die Coulomb Eichung:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (8)$$

2 Geladenes Teilchen im EM Feld

2.1 H: Freies Teilchen, Wechselwirkung

Der Hamilton Operator für ein Teilchen, mit Masse m und Ladung e , im elektromagnetischen Feld ist bekannt aus der klassischen Elektrodynamik. Das Teilchen befindet sich in einem zeitunabhängigen Potential $V(\mathbf{x})$.

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \right)^2 + e\phi(\mathbf{x}, t) + V(\mathbf{x}) \quad (9)$$

Wir wollen diesen Hamilton Operator in einen Teil für das freie Teilchen und einen Teil für die Wechselwirkung zwischen Feld und Teilchen aufteilen.

$$H = \underbrace{H_0}_{\text{freies Teilchen}} + \underbrace{H_{WW}}_{\substack{\text{Wechselwirkung} \\ \text{zwischen geladenem Teilchen} \\ \text{und dem Strahlungsfeld}}} \quad (10)$$

Für das freie Teilchen ist der Hamilton Operator aus der Mechanik bekannt. Wir brachten ein System mit i Teilchen.

$$H_0 = \sum_i \left(\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{x}_i) \right) \quad (11)$$

2.2 H: Wechselwirkungsterm

Für den Zeitabhängiger Wechselwirkungsterm ergibt sich aus dem ersten und zweiten Term des Hamilton-Operators (9)

$$H_{WW} = - \sum_i \left(- \frac{e}{2mc} \{ \mathbf{p}, \mathbf{A}(\mathbf{x}_i, t) \} + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2(\mathbf{x}_i, t) + e \phi(\mathbf{x}_i, t) \right) \quad (12)$$

Dies lässt sich mit der Teilchendichte $\rho(\mathbf{x})$ und der Teilchenstromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ sowie unter Verwendung der Coulomb-Eichung ($\nabla \mathbf{A} = 0$) in kompakterer Weise schreiben.

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i); \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_i \left\{ \frac{\mathbf{p}}{m}, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right\} \quad (13)$$

$$H_{WW} = \int d^3x \left(- \frac{e}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) + \frac{e^2}{2mc^2} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{A}^2(\mathbf{x}, t) + e \rho(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}, t) \right) \quad (14)$$

Da wir im Folgenden das freie Strahlungsfeld betrachten können wir den letzten Term vernachlässigen.

3 Freies Strahlungsfeld

3.1 Analogie zum eindimensionalen harmonischen Oszillator

Aus der Erkenntnis die wir aus dem Fotoelektrischen-Effekt ziehen, der Quantisierung der Elektromagnetischen Strahlung, liegt die Annahme nahe das das Strahlungsfeld ebenfalls quantisiert ist. Die **Quanten** nennen wir Photonen. Ziel dieses Abschnittes ist die Formulierung des freien Strahlungsfeldes in Form von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren, so wie wir das schon für den eindimensionalen harmonischen Oszillator kennen.

Ein Photon besitzt den Impuls $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$. Die Polarisationsvektoren $\epsilon_{\mathbf{k}, \lambda}$ bilden eine Orthonormalbasis zum Wellenvektor $\mathbf{k}$ mit $\lambda \in \{1, 2\}$. Unter Coulomb-Eichung folgt $\mathbf{k} \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda} = 0$. Der Zustand eines Photons ist somit durch $|\nu\rangle = |\mathbf{k}, \lambda\rangle$ gegeben. Die Photonen befinden sich im Kasten mit endlichem Volumen V und periodischen Randbedingungen. Daraus folgt das $\mathbf{k}$ und $\mathbf{p}$ nur diskrete Werte annehmen (stehende Wellen).

Das Strahlungsfeld besteht aus vielen Photonen somit ist dessen Zustand $|\phi\rangle = |n_1, n_2, n_3, \dots\rangle$ mit N Photonen $\sum_{\nu} n_{\nu} = N$. Das Strahlungsfeld ist also ein System **ungekoppelter harmonischer Oszillatoren zu jedem ν** .

Erinnerung: Der eindimensionale harmonische Oszillator

Der Hamilton-Operator, ausgedrückt durch den Ortsoperator q ist gegeben durch

$$H = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{m\omega^2}{2}q^2 \quad (15)$$

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(a(t) + a^\dagger(t) \right) \quad (16)$$

mit dem zeitabhängigen Vernichtungsoperator (Erzeugungsoperator analog):

$$a(t) = a e^{-i\omega t} \quad (17)$$

wobei Vernichtungs- und Erzeugungsoperator nicht kommutieren:

$$[a(t), a^\dagger(t)] = 1 \quad (18)$$

Den Hamilton-Operator können wir auch durch die Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren ausdrücken:

$$H = \hbar\omega \left(a^\dagger(t) a(t) + \frac{1}{2} \right) \quad (19)$$

Wir wollen nun das Strahlungsfeld quantisieren und den Hamilton Operator in analoger Weise durch Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren ausdrücken.

3.2 H_{Str} ausgedrückt durch Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren

Für das freie Strahlungsfeld gilt unter Coulomb Eichung $\nabla \mathbf{A} = 0$ und wegen Abwesenheit von Quellen $\phi = 0$ (aus den Gleichungen für das vektorielle (3) und das skalare (5) Potential)

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (20)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (21)$$

Daraus lässt sich folgern das $\mathbf{A}$ die homogene Wellengleichung erfüllt.

$$0 = \square \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \Delta \mathbf{A} \quad (22)$$

Das erlaubt die Entwicklung in die Fourier-Reihe:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \epsilon_{\mathbf{k}, \lambda} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (23)$$

Nun wollen wir den Hamilton-Operator für das freie Strahlungsfeld durch Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren ausdrücken. Dazu führen wir einen Vergleich zwischen dem Hamilton-Operator für den eindimensionalen Harmonischen Oszillator und dem Hamilton Operator für das freie Strahlungsfeld, so wie er aus der klassischen Elektrodynamik bekannt ist, durch.

Dazu bringen wir die beiden Hamilton-Operatoren auf die gleiche Form:

$$H_{Osz} = \frac{m \dot{q}^2}{2} + \frac{m \omega^2}{2} q^2 \quad (24)$$

$$H_{Str} = \frac{1}{8\pi} \int d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) = \frac{V}{8\pi} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{c^2} |\dot{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}|^2 + \mathbf{k}^2 |\mathbf{A}_{\mathbf{k}}|^2 \right) \quad (25)$$

In H_{Str} wurden die Gleichungen (20) und (21) verwendet um E und B durch $\mathbf{A}$ auszudrücken. Der zweite Term ergibt sich aus:

$$|\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)|^2 = (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) = \Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)^2 - (\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \cdot (\nabla \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)) \quad (26)$$

=0, Coulomb-Eichung

Der Vergleich der Vorfaktoren führt auf $m = \frac{1}{4\pi c^2}$. Somit können wir den das Vektorfeld in analoger Weise wie den Ort-Operator ausdrücken. Dazu müssen wir den Vorfaktor von q mit dem neu gewonnen m anpassen.

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a(t) + a^\dagger(t)) \quad (27)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (a_{\mathbf{k}, \lambda}(t) + a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger(t)) \quad (28)$$

mit $a_{\mathbf{k}, \lambda}(t) = a_{\mathbf{k}, \lambda}(0) e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$

in Analogie zum 1D Oszillator gelten die Kommutator-Relationen:

$$[a_{\mathbf{k}, \lambda}(t), a_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger(t)] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'} \quad (29)$$

$$[a_{\mathbf{k}, \lambda}(t), a_{\mathbf{k}', \lambda'}(t)] = [a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger(t), a_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger(t)] = 0 \quad (30)$$

$$a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger(t) a_{\mathbf{k}, \lambda}(t) = n_{\mathbf{k}, \lambda} \quad (31)$$

damit kommen wir auf die Form.

$$H_{Str} = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \hbar c k \left(n_{\mathbf{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (32)$$

Die Rechnung erfolgt in analoger Weise wie bei dem harmonischen Oszillator. Die Eigenzustände des Besetzungszahl-Operators $n_{\mathbf{k}, \lambda}$ ergeben sich durch n faches aufsteigen aus dem Grundzustand $|0\rangle$. Dieser ist definiert durch $a_{\mathbf{k}, \lambda}(t) |0\rangle = 0$ für alle k, λ .

$$|n_{\mathbf{k}, \lambda}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\mathbf{k}, \lambda}!}} \left(a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger(t) \right)^{n_{\mathbf{k}, \lambda}} |0\rangle \quad (33)$$

Die Eigenzustände des H_{Str} Operators sind Produkte der Eigenzustände des Besetzungszahl-Operators:

$$|\dots, n_{\mathbf{k}, \lambda}, \dots\rangle = \prod_{\mathbf{k}_i} \prod_{\lambda_i} |n_{\mathbf{k}_i, \lambda_i}\rangle \quad (34)$$

mit der Energie, als die Summe der Energien der ungekoppelten Oszillatoren:

$$\sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \left(n_{\mathbf{k}, \lambda} + \frac{1}{2} \right) \quad (35)$$

3.3 Zusammenfassung

Der gesamte Hamilton-Operator von Materie, die mit dem quantisierten Strahlungsfeld wechselwirkt, lautet:

$$H = \underbrace{H_0}_{\text{freies Teilchen}} + \underbrace{H_{WW}}_{\substack{\text{Wechselwirkung} \\ \text{zwischen geladenem Teilchen} \\ \text{und dem Strahlungsfeld}}} + \underbrace{H_{Str}}_{\text{freies Strahlungsfeld}} \quad (36)$$

4 Zeitabhängige Störung

Um im 5. Abschnitt die Wechselwirkung zwischen Teilchen und Feld als periodische Störung des Feldes beschreiben zu können, wollen wir in diesem Kapitel die Übergangsrate zwischen zwei Zuständen, unter periodischer Störung, allgemein herleiten. Zuerst leiten wir die Übergangsrate für zeitlich konstante Störungen her und nutzen dieses Ergebnis um die periodische Störung zu beschreiben.

4.1 Wechselwirkungsbild

Um die Zeitabhängige Störungstheorie in eleganterer Weise formulieren zu können führen wir das Wechselwirkungsbild, auch Dirac-Bild genannt, ein. Es liegt gewissermaßen zwischen der Schrödinger- und der Heisenberg-Darstellung. Im Wechselwirkungsbild sind Zustand **und** Operatoren beide zeitabhängig.

Diese Darstellung führt später zu einer einfacheren Formulierung der Schrödingergleichung unter Störung.

$$|\psi, t\rangle_I = e^{iH_0 t/\hbar} |\psi, t\rangle \quad (37)$$

$$A_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} A(t) e^{-iH_0 t/\hbar} \quad (38)$$

Die **Zustände** bewegen sich aufgrund des **Störanteils** des Hamilton-Operators und die **Operatoren** aufgrund des freien Teils H_0 . Somit können wir die Zeitentwicklung die von H_0 ausgeht von der Zeitentwicklung der Störung separieren.

4.2 Zeitabhängige Störung

Wir betrachten eine Störung $V(t)$ die klein gegenüber H_0 ist und $V(t) = 0$ für Zeiten $t \leq t_0$. Damit ist die Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle = [H_0 + V(t)] |\psi, t\rangle \quad (39)$$

Nun wollen wir die Schrödingergleichung in der Wechselwirkung-Darstellung schreiben. Dazu leiten wir den Zustand im Wechselwirkungsbild (37) nach der Zeit ab. Für die Zeitableitung des Zustandes $|\psi, t\rangle$ setzen wir die Schrödingergleichung (39) ein.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle_I = -H_0 |\psi, t\rangle_I + e^{iH_0 t/\hbar} \underbrace{[H_0 + V(t)]}_{\text{SG}} |\psi, t\rangle \quad (40)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi, t\rangle_I = V(t)_I |\psi, t\rangle_I \quad (41)$$

Somit ist die Schrödingergleichung für Zustände im Wechselwirkungsbild nur von der Störung des Hamilton-Operators abhängig und wir können diese durch Integration lösen.

$$|\psi, t\rangle = |\psi, t_0\rangle_I + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') |\psi, t'\rangle_I \quad (42)$$

Durch iteratives Einsetzen von $V_I(t)$ gelangen wir zu einer beliebig genauen Lösung:

$$|\psi, t\rangle = |\psi, t_0\rangle_I + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') |\psi, t_0\rangle_I + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' V_I(t') V_I(t'') |\psi, t_0\rangle_I + \dots \quad (43)$$

Diese Reihe bezeichnet man als Neumann-Reihe. Wir werden uns im Folgenden auf die Entwicklungen im **ersten Term** beschränken, die für unsere Anwendungen ausreichen.

4.3 Übergänge 1. Ordnung

Wir wollen nun die Übergangswahrscheinlichkeit für die Übergänge 1. Ordnung berechnen. Wir betrachten den Anfang- und Endzustand (Eigenzustand von H_0):

$$|m, t\rangle = e^{-iH_0 t/\hbar} |m\rangle = e^{-iE_m t/\hbar} |m\rangle; \quad |n, t\rangle = e^{-iH_0 t/\hbar} |n\rangle = e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle \quad (44)$$

Dabei setzen wir den Anfangszustand so das er vor der Störung zeitunabhängig ist:

$$|\psi, t_0\rangle_I = e^{+iH_0 t/\hbar} |m, t\rangle = |m\rangle \Rightarrow |\psi, t\rangle_I = |m\rangle + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' V_I(t') |m\rangle \quad (45)$$

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsamplitude für diesen Übergang ist:

$$\langle n, t | \psi, t \rangle = \langle n | e^{iH_0 t/\hbar} |m, t\rangle = \langle n | \psi, t \rangle_I \quad (46)$$

$$= \delta_{n m} + \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' e^{i(E_n - E_m)t'/\hbar} \langle n | V(t') | m \rangle \quad (47)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit folgt mit $\delta_{n m} = 0$ da wir nur Übergänge von einem zu einem **anderen** Zustand betrachten.

$$P_{mn}(t) = |\langle n, t | \psi, t \rangle|^2 = \left| \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t dt' e^{i(E_n - E_m)t'/\hbar} \langle n | V(t') | m \rangle \right|^2 \quad (48)$$

4.4 Fermis Goldene Regel

Nun betrachten wir eine Störung die bei $t = 0$ eingeschaltet wird und sich dann nicht mehr ändert $V(t) = V\theta(t)$. V ist also nicht zeitabhängig und die Übergangswahrscheinlichkeit lässt sich durch intrigieren des Exponentialterms vereinfachen.

$$P_{mn} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t dt' e^{i(E_n - E_m)t'/\hbar} \langle n | V | m \rangle \right|^2 \quad (49)$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \left| \frac{e^{i\omega_{nm}t} - 1}{\omega_{nm}} \langle n | V | m \rangle \right|^2 \quad (50)$$

$$= \frac{1}{\hbar^2} \left[\frac{\sin(\omega_{nm}t/2)}{\omega_{nm}/2} \right]^2 |\langle n | V | m \rangle|^2 \quad (51)$$

mit

$$\omega_{nm} = \frac{E_n - E_m}{\hbar} \quad (52)$$

Die Sinc(oder auch Spalt)-Funktion lässt sich auf die Form der bekannten Funktionen-Folge $\delta_t(\alpha)$ bringen.

$$\delta_t(\alpha) = \frac{\sin^2(\alpha t)}{\pi \alpha^2 t} \quad (53)$$

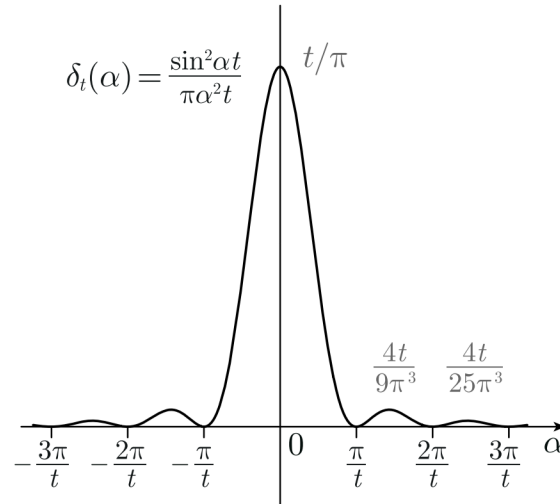


Abbildung 2: Die Funktion $\delta_t(\alpha)$ [4]

Aus Abbildung ?? kann man erkennen das diese Funktionen-Folge für große t gegen eine δ Funktion konvergiert.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_t(\alpha) = \delta(\alpha) \quad (54)$$

Der Beweis wird dem Leser überlassen.

Für große t gilt damit:

$$P_{mn}(t) = t \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_n - E_m) |\langle n | V | m \rangle|^2 \quad (55)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit verschwindet also wenn die Zustände unterschiedliche Energien haben.

Die Übergangsrate ist die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeit und somit:

$$\Gamma_{mn} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_n - E_m) |\langle n | V | m \rangle|^2 \quad (56)$$

Wir werden mit dieser Übergangsrate (56) im nächsten Abschnitt periodische Störungen beschreiben. Ein kleiner Exkurs, dem Übergang zum Kontinuum, für zu der berühmten **goldenen** Regel nach

Fermi. Hier betrachten wir also ein Übergang in eine Gruppe von Zuständen. Das ist aus der Teilchenphysik, bei der Streuung in einen Winkelbereich, bekannt. Dazu integrieren wir Γ_{mn} über die Zahl der Zustände im Intervall der Energien der Endzustände $dE_n \varrho(E_n)$. Dabei müssen wir voraussetzen, dass die Matrixelemente für alle Zustände gleich sind.

$$\sum_n \Gamma_{mn} = \int dE_n \varrho(E_n) \Gamma_{mn} = \frac{2\pi}{\hbar} \varrho(E_n) |\langle n | V | m \rangle|^2 \quad (57)$$

4.5 Periodische Störungen

Schließlich können wir eine Störung betrachten, die periodisch mit der Zeit variiert. Dieser Fall liegt beim einem periodischem elektrischem Feld vor. F sei Operator.

$$V(t) = \theta(t) (F e^{-i\omega t} + F^\dagger e^{+i\omega t}) \quad (58)$$

Diese Form erinnert schon an das Vektorfeld in der Formulierung mit Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren (28).

Das Übergangsmatrixelement können wir in gleicher Weise berechnen wie bei den Übergängen 1. Ordnung.

$$\langle n, t | \psi, t \rangle = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt' \left[e^{i(\omega_{nm} - \omega)t'} \langle n | F | m \rangle + e^{i(\omega_{nm} + \omega)t'} \langle n | F^\dagger | m \rangle \right] \quad (59)$$

Da $\delta(\omega_{nm} - \omega)$ und $\delta(\omega_{nm} + \omega)$ nicht überlappen tragen die gemischten Terme nicht im Absolutquadrat bei.

$$|\langle n, t | \psi, t \rangle|^2 = t \frac{2\pi}{\hbar^2} \left[\delta(\omega_{nm} - \omega) |\langle n | F | m \rangle|^2 + \delta(\omega_{nm} + \omega) |\langle n | F^\dagger | m \rangle|^2 \right] \quad (60)$$

Auf die Übergangsrate kommen wir wie im vorigen Abschnitt.

$$\Gamma_{mn} = \frac{2\pi}{\hbar} \left[\delta(E_n - E_m - \hbar\omega) |\langle n | F | m \rangle|^2 + \delta(E_n - E_m + \hbar\omega) |\langle n | F^\dagger | m \rangle|^2 \right] \quad (61)$$

Wir können hier schon erkennen, dass der erste Term, für den Fall, bei dem die Störung dem Feld Energie entzieht, gilt. Der Endzustand hat eine kleinere Energie als der Anfangszustand $E_n < E_m$. Analog gilt der zweite Term für die Zunahme von Energie $E_n > E_m$.

5 Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld

5.1 Emission und Absorption

Wir betrachten die Emission eines Photons durch den Energieübergang eines Atoms. Die Wechselwirkung zwischen Teilchen und Feld induziert, als periodische Störung des Feldes, diese Emission.

$$\text{Strahlungsfeld: } |n_{\mathbf{k}, \lambda}\rangle \longrightarrow |n_{\mathbf{k}, \lambda} + 1\rangle \quad (62)$$

$$\text{Atomares Elektron: } |m\rangle \longrightarrow |n\rangle \quad (63)$$

Die Wechselwirkung wird beschrieben durch den Hamilton-Operator H_{WW} . Wir werden hier nur Prozesse mit einem Photon betrachten, daher fällt der zweite Term weg, der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren in quadratischer Form enthält.

$$H_{WW} = \int d^3x \left(\underbrace{-\frac{e}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}_{\text{Prozesse mit einem Photon}} + \underbrace{\frac{e^2}{2mc^2} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{A}^2(\mathbf{x}, t)}_{\text{Prozesse mit mehreren Photonen}} \right) \quad (64)$$

Wir setzen das Vektorpotential in Form der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren ein. Wir behandeln zunächst nur die Emission, daher fällt der Term mit dem Vernichtungsoperator weg.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k}, \lambda} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left(a_{\mathbf{k}, \lambda}(t) + \underbrace{a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger(t)}_{\substack{\text{Emission:} \\ \text{nur Erzeugung}}} \right) \quad (65)$$

Schließlich wollen wir die Übergangsrate bestimmen. Dies geschieht auf Grundlage Übergangsrate die wir im allgemeinen im vorigen Abschnitt hergeleitet haben (61). Der erste Term fällt ebenso weg da die Emission ein Prozess mit Energiezunahme (aus der Sicht des Feldes) ist.

$$\Gamma_{mn} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_n - E_m + \hbar\omega) \left| \langle n | F^\dagger | m \rangle \right|^2 \quad (66)$$

Die Übergangsamplitude lässt sich dann folgendermaßen berechnen:

$$\langle n | \langle n_{\mathbf{k}, \lambda} + 1 | \tilde{H}_{WW} | n_{\mathbf{k}, \lambda} \rangle | m \rangle \quad (67)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{kV}} \left(-\frac{e}{c} \right) \langle n | \langle n_{\mathbf{k}, \lambda} + 1 | \underbrace{\mathbf{j}(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}_{=\mathbf{j}_{\mathbf{k}}, \text{ Fourier-Transformation}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda}^* a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger(t) | n_{\mathbf{k}, \lambda} \rangle | m \rangle \quad (68)$$

$$= -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_{\mathbf{k}} V}} \langle n | \mathbf{j}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda}^* | m \rangle \underbrace{\langle n_{\mathbf{k}, \lambda} + 1 | a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger(t) | n_{\mathbf{k}, \lambda} \rangle}_{\sqrt{n_{\mathbf{k}, \lambda} + 1} \langle n_{\mathbf{k}, \lambda} + 1 | n_{\mathbf{k}, \lambda} + 1 \rangle} \quad (69)$$

$$= -e \sqrt{\frac{2\pi\hbar(n_{\mathbf{k}, \lambda} + 1)}{\omega_{\mathbf{k}} V}} \langle n | \mathbf{j}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda}^* | m \rangle \quad (70)$$

Einsetzen in Γ_{mn} (66) führt zur Übergangsrate:

$$\Gamma_{m \rightarrow n}^{emiss} = (n_{\mathbf{k}, \lambda} + 1) \frac{(2\pi)^2 e^2}{V c k} \delta(E_n - E_m + \hbar c k) \left| \langle n | \mathbf{j}_{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda}^* | m \rangle \right|^2 \quad (71)$$

Hier können wir erkennen das sogar für $n_{\mathbf{k}, \lambda} = 0$ die Übergangsrate nicht verschwindet. Diesen Prozess nennen wir spontane Emission. Mit $n_{\mathbf{k}, \lambda} \neq 0$ sprechen wir von stimulierter Emission.

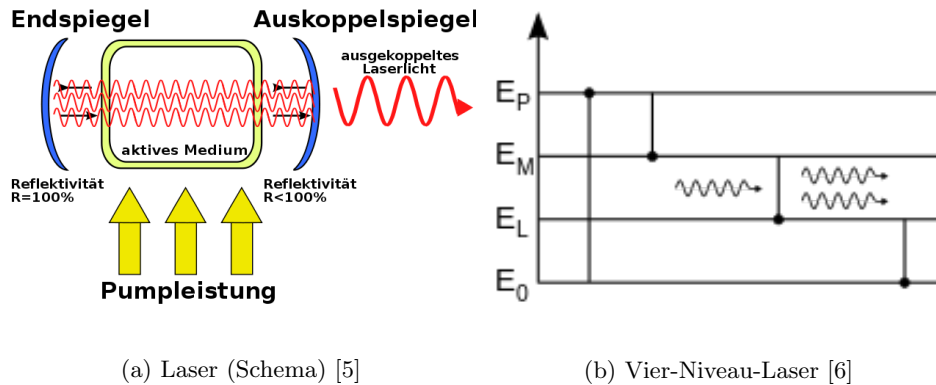
Für die Absorption können wir die Rechnung analog durchführen:

$$\Gamma_{n \rightarrow m}^{abs} = n_{\mathbf{k}, \lambda} \frac{(2\pi)^2 e^2}{V c k} \delta(E_n - E_m - \hbar c k) \left| \langle m | \mathbf{j}_{-\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}, \lambda} | n \rangle \right|^2 \quad (72)$$

Vergleichen wir die Übergangsrate der beiden Prozesse, so fällt auf, dass der Beitrag der stimulierten Emission großgleich mit der Absorption ist. Diese Tatsache führt zu einer Interessanten Erkenntnis beim Laser.

5.2 Laser

Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation



Der Laser besteht aus einem sogenannten „aktivem Medium“, in dem Optische Übergänge von Atomen möglich sind. Diesem Medium wird, durch Licht oder Strom, Energie zugefügt. Dieses „Pumpen“ sorgt für eine Besetzungsinversion $n_{\mathbf{k}, \lambda} \gg n_{\mathbf{k}', \lambda}$. Die Übergangsrate für die Emission der Photonen der Energie $\hbar|\mathbf{k}|$ ist also sehr viel höher als die Übergangsrate für Emission mit Photonen anderer Energie.

Die Photonen welche diesen Übergang spontan, aufgrund der hohen Übergangsrate, durchführen stimulieren weitere Emissionen. Das führt zu einer Kettenreaktion von stimulierter Emission und somit zu sehr vielen Photonen der gleichen Wellenlänge.

Ein Laser kann nicht mit einem Zwei-Zustand-System realisiert werden. Sobald die Hälfte der Zustände im oberen Energiezustand E_M sind, ist die Wahrscheinlichkeit, das ein Photon absorbiert wird genauso groß die Wahrscheinlichkeit für die stimulierte Emission. Diese Vorgänge gleichen sich also aus und die Kettenreaktion bleibt aus.

Eine Lösung des Problems ist das Vier-Zustand-System, in dem noch ein Energie-Niveau über und ein Energie-Niveau unter den Niveaus des Laser Übergangs $E_M \rightarrow E_L$ liegt. Die Übergänge von $E_P \rightarrow E_M$ sowie $E_L \rightarrow E_0$ haben eine größere Rate als der Übergang $E_M \rightarrow E_L$ der stimulierten Emission. Dadurch ist E_M immer mit mehr Zuständen besetzt als E_L und damit die Übergangsrate für die Emission höher als für die Absorption.

Literatur

- [1] Von SuperManu - Self, based on Image:Onde electromagnetique.png, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2107870>
- [2] By Wolfmankurd - en:Inkscape, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2072934>
- [3] Von AllenMcC. - File:HarmOsziFunktionen.jpg, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=11623546>
- [4] Franz Schwabl: Quantenmechanik (QM I) Eine Einführung; Abb.16.2; 7. Auflage; © Springer-VerlagBerlin Heidelberg, 2007; ISBN 978-3-540-73674-5
- [5] Von Sgbeer - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8544739>
- [6] Von LarsOliverLutsch in der Wikipedia auf Deutsch - Eigenes Werk (Original-Bildunterschrift: "selbst erstellt")Übertragen aus de.wikipedia nach Commons durch Wdwd mithilfe des CommonsHelper., Gemeinfrei, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18039385>
- [A] Franz Schwabl: Quantenmechanik (QM I) Eine Einführung; §16; 7. Auflage; © Springer-VerlagBerlin Heidelberg, 2007; ISBN 978-3-540-73674-5
- [B] Prof. Christof Wetterich: Theoretische Physik 4 - Quantenphysik; §11 f und g ; 20. Juli 2016
- [C] A.S. Dawydow: Quantenmechanik; § 80,94,95; 8.Auflage; Johann Ambrosius Brath
- [D] Bartelmann: Theoretische Physik ISBN 978-3-642-54617-4 © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015
- [E] de.wikipedia.org/wiki/Laser (Stand: 21. Dezember 2016, 09:01 Uhr)