

# Dirac-Gleichung - freie Teilchen

Quantenmechanik-Seminar WS 16/17, Prof. Dr. Wolschin

Elif YILDIRIM

8. Januar 2017

Aus der Grundlage der nichtrelativistischen Quantenmechanik, die auf der Schrödinger-Gleichung beruht, wurde ein erster Versuch zur Formulierung einer relativistischen Bewegungsgleichung unternommen. Dies führte zur Klein-Gordon-Gleichung. Aufgrund ihrer Eigenschaften war diese jedoch nicht als Wellenfunktion interpretierbar. Erst Paul Dirac gelang es eine korrekte Beschreibung relativistischer Teilchen zu entwickeln. Als Interpretation negativer Energiezustände, die als Lösungen der Gleichung auftreten, entwickelte Dirac 1930 die Löchertheorie. Darin postuliert er unendlich tiefe Zustände negativer Energien, die alle besetzt sind. Unbesetzte Zustände bzw. Löcher in diesem Dirac-See, entsprechen Antiteilchen.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Übergang zur relativistischen Quantenmechanik . . . . .	2
1.1.1	spezielle Relativitätstheorie . . . . .	2
1.1.2	Klein-Gordon-Gleichung . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Dirac-Gleichung</b>	<b>4</b>
2.1	Kovariante Formulierung der Dirac-Gleichung . . . . .	5
2.2	Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Lösung der Dirac-Gleichung</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Löchertheorie</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Anhang</b>	<b>10</b>
5.1	Graphen . . . . .	10
<b>6</b>	<b>Quellenverzeichnis</b>	<b>10</b>

# 1 Einleitung

Primäres Ziel war es eine Beschreibung für Elektronen zu finden. Da sich diese Spin-1/2 Teilchen mit nahezu Lichtgeschwindigkeit bewegen, genügte die 1926 formulierte Schrödinger-Gleichung (SE)

$$i\hbar\partial_t|\Psi\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2|\Psi\rangle \quad (1)$$

nicht aus. Betrachtet man die Gleichung genauer, fällt auf, dass der Eigendrehimpuls eines Teilchens nicht berücksichtigt wird. Außerdem unterscheidet sich die Ordnung der räumlichen und zeitlichen Ableitungen. Die Gleichung ist somit nicht invariant unter Lorentz-Transformation und deshalb nicht geeignet zur Beschreibung relativistischer Teilchen.

## 1.1 Übergang zur relativistischen Quantenmechanik

### 1.1.1 spezielle Relativitätstheorie

Da wir eine Bewegungsgleichung im Relativistischen suchen, werden im Folgenden kurz Notationen der speziellen Relativitätstheorie veranschaulicht. In der Relativitätstheorie werden Raum und Zeit nicht getrennt betrachtet, sondern in sog. Vierervektoren  $x^\mu = (x^0, x^k) = (ct, \vec{x})$  zusammengefasst. Diese stellen einen Punkt im Raum-Zeit-Diagramm, dem Minkowski-Diagramm dar, wobei die lateinischen Indizes die räumlichen Komponenten darstellen und die griechischen die zeitliche Komponente.

Man unterscheidet diese Vektoren nach Transformationsverhalten in kovariante  $x_\mu$  und kontravariante  $x^\mu$  Vektoren.

Die Metrik im Minkowski-Raum wird durch den metrischen Tensor definiert:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Dieser transformiert kovariante in kontravariante Vektoren  $x^\mu = g^{\mu\nu}x_\nu$  und umgekehrt.

Der Ableitungsoperator hat die Gestalt in kovarianter  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla\right)$  und kontra-

varianten  $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, -\nabla\right)$  Schreibweise.

Womit sich der d'Alembertoperator schreibt als:

$$\square = \partial_\mu\partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} - \Delta \quad (3)$$

### 1.1.2 Klein-Gordon-Gleichung

Ein erster Ansatz zur Formulierung einer relativistischen Wellengleichung war die Klein-Gordon-Gleichung (KGE). Deren Herleitung erfolgt analog zur Schrödinger-Gleichung.

Als Ansatz verwendet man auch hier die allgemeine SE:

$$i\hbar\partial_t|\Psi\rangle = \hat{H}|\Psi\rangle \quad (4)$$

Jedoch nutzt man statt der klassischen Energie-Impuls-Beziehung  $E = \frac{p^2}{2m}$ , den relativistischen Energieausdruck:

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} \quad (5)$$

Mit dem Korrespondenzprinzip <sup>1</sup>,

- $E \rightarrow \hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$
- $p \rightarrow \hat{p} = \frac{\hbar}{i}\nabla$

erhält man schließlich die freie Klein-Gordon-Gleichung:

$$\boxed{-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}|\Psi\rangle = (\hat{p}^2c^2 + m^2c^4)|\Psi\rangle} \quad (6)$$

in kovarianter Form:

$$\boxed{\left(\partial_\mu\partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)|\psi\rangle = 0} \quad (7)$$

Beim Vergleich mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\vec{j} = 0 \quad (8)$$

ergibt sich für die KGE, aufgrund der zweifachen zeitlichen Ableitung, eine nicht positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte  $\rho$  und eine Stromdichte  $j$  der Form:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*) \quad (9)$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \quad (10)$$

Hier stellt sich die Frage, was die physikalische Bedeutung einer negativen Aufenthaltswahrscheinlichkeit ist. Die KGE konnte aufgrund dieser Eigenschaft nicht länger als Einteilchentheorie interpretiert werden. Erst durch die Deutung der Gleichung als Theorie der Ladung, fand sie Anwendung. Die Dichte wurde als elektrische Ladungsdichte interpretiert und der Strom als elektrischer Strom, womit die Kontinuitätsgleichung als Ladungserhaltung anzusehen ist.

---

<sup>1</sup> Das Korrespondenzprinzip überführt klassische Größen in Operatoren

Durch den quadrierten Energieterm erhält man Lösungen mit positiver und negativer Energie:

$$|\psi\rangle = e^{-i\frac{\pm Et - px}{\hbar}}, \quad E = \pm\sqrt{pc^2 + m^2c^4} \quad (11)$$

Dieses Problem fand erst durch die Formulierung der Löchertheorie physikalische Interpretation. Auch die KGE lässt den Spin unberücksichtigt. Sie beschreibt also nur Teilchen mit Spin 0. Im Rahmen der Quantenfeldtheorie, beschreibt das hermitesche skalare Klein-Gordon-Feld neutrale Mesonen mit Spin 0.

Aufgrund der genannten Eigenschaften und der primären Absicht zur Beschreibung von Elektronen, also Spin-1/2 Teilchen, ist die KGE ungeeignet um als relativistische Wellengleichung zu dienen. Erst mit einem neuen Ansatz durch Dirac wurde eine erfolgreiche Beschreibung relativistischer Teilchen möglich.

## 2 Dirac-Gleichung

Dirac machte einen neuen Ansatz, der Form:

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \left(\frac{\hbar c}{i}\alpha^k\partial_k + mc^2\beta\right)|\psi\rangle = H_D|\psi\rangle} \quad (12)$$

mit dem Dirac-Hamilton-Operator  $H_D = \left(\frac{\hbar c}{i}\alpha^k\partial_k + mc^2\beta\right)$ .

$\alpha^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) und  $\beta$  stellen Matrizen dar und sind aufgrund der hermiteschen Eigenschaft des Hamiltonian, selbst hermitesche NxN-Matrizen. In diesem Gleichungssystem entspricht die Zustandswellenfunktion  $|\psi\rangle$  somit einem N-Komponentigen Spaltenvektor. Diese Form der Gleichung hat folgende drei Forderungen zu erfüllen:

- Komponenten von  $|\psi\rangle$  erfüllen die KGE (s.d für ebene Wellen als Lösung  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$  gilt)
- Die Kontinuitätsgleichung ist erfüllt (mit pos. definiten Dichte)
- Die Gleichung ist Lorentz-Kovariant

Damit die Gleichung die relativistische Energie-Impuls-Beziehung erfüllt, müssen die Komponenten von  $|\psi\rangle$  die KGE erfüllen. Um das zu erreichen, wird die DE quadriert und komponentenweise mit der KGE verglichen.

Daraus ergeben sich folgende Bedingungen an die Matrizen:

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij}\mathbf{1} \quad (13)$$

$$(\alpha^i)^2 = \beta^2 = \mathbf{1} \quad (14)$$

$$\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0 \quad (15)$$

Aus diesen drei Bedingungen, ergeben sich weitere Eigenschaften von  $\alpha$  und  $\beta$ :

- Antikommutativ:  $\{\alpha^k, \beta\} = 0$   $(\alpha^i)^2 = \beta^2 = \mathbb{1} \Rightarrow$  Eigenwerte  $\pm 1$
- Spurfrei:  $Sp(\alpha^k) = Sp(\beta) = 0$
- Dimension  $N=4$

Aus der hermiteschen Eigenschaft des Hamilton-Operators, haben wir bereits festgestellt, dass  $\alpha$  und  $\beta$   $N \times N$ -Matrizen sein müssen. Da die Spur der Matrizen verschwinden soll und die Eigenwerte nur  $\pm 1$  annehmen können, muss die Dimension einen geradzahli- gen Wert annehmen. Für die Dimension  $N=2$ , bilden bereits drei antikommutierende Ma- trizen eine vollständige Basis. Wir benötigen jedoch vier antikommutierende Matrizen, weshalb  $\alpha$  und  $\beta$  die nächstmögliche Dimension  $N=4$  annehmen. Unser Zustandsvektor  $|\psi\rangle$  ist somit ein vierkomponentiger Spinor.

Eine weitere Forderung an die Dirac-Gleichung ist eine positive Wahrscheinlichkeitsdich- te. Der Vergleich <sup>2</sup> mit der Kontinuitätsgleichung (8) erfolgt, indem man zunächst die Gleichung (12) von links mit dem adjungierten Zustandsvektor  $\psi^\dagger$  multipliziert.

$$i\hbar\psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\hbar c}{i} \psi^\dagger \alpha^k \partial_k \psi + mc^2 \psi^\dagger \beta \psi \quad (16)$$

Die adjungierte DE wird von rechts mit  $\psi$  multipliziert und ergibt:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger \psi = -\frac{\hbar c}{i} (\partial_k \psi^\dagger) \alpha^{k\dagger} \psi + mc^2 \psi^\dagger \beta^\dagger \psi \quad (17)$$

Diese beiden Gleichungen zieht man voneinander ab und erhält durch Koeffizientenver- gleich:

$$\rho = \psi^\dagger \psi \geq 0 \quad (18)$$

$$j^k = c\psi^\dagger \alpha^k \psi \quad (19)$$

Wobei die Ladungserhaltung in kovarianter Form  $\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} j^0 + \frac{\partial}{\partial x^k} j^k = 0$  mit  $j^0 = c\rho$ ,  $j^\mu = (j^0, j^k)$  ist. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der DE entspricht dem Betragsquadrat der Wellenfunktion und ist somit positiv definit.

## 2.1 Kovariante Formulierung der Dirac-Gleichung

Um die Dirac-Gleichung (12) in eine kovariante Form umschreiben zu können, multipli- ziert man diese zunächst mit  $(-\frac{\beta}{c})$ .

Mit  $\partial_0 := \frac{\partial}{c\partial t}$  ergibt sich dann folgender Ausdruck:

$$-i\hbar\beta\partial_0\psi - i\hbar\beta\alpha^k\partial_k\psi + mc\psi = 0 \quad (20)$$

Nun werden neue Matrizen (Dirac-Matrizen)  $\gamma^0 \equiv \beta$ ,  $\gamma^k \equiv \beta\alpha^k$  definiert.

<sup>2</sup> Der Vergleich wurde auf analoger Weise für die KGE durchgeführt

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Mit diesen Matrizen schreibt sich die DE der Form:

$$\boxed{\left(-i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar}\right) |\psi\rangle = 0} \quad (22)$$

Aus der Feynmanschen Schreibweise  $\not{\partial} = \gamma v = \gamma_\nu v^\nu = \gamma^0 v^0 - \gamma^k \vec{v}$  reduziert sich Gleichung (22) schließlich zu:

$$\boxed{\left(-i \not{\partial} + \frac{mc}{\hbar}\right) |\psi\rangle = 0} \quad (23)$$

Aufgrund der Eigenschaften von  $\alpha^k$  und  $\beta$  gilt:

- $\gamma^0 = (\gamma^0)^\dagger, \quad (\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$
- $(\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k, \quad (\gamma^k)^2 = -\mathbb{1}$

Damit erfüllen die  $\gamma$ -Matrizen die sog. Clifford-Algebra:  $\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$   
Die Dirac-Gleichung mit den nun definierten  $\gamma$ -Matrizen muss die letzte Forderung der Lorentz-Kovarianz erfüllen. Das bedeutet, dass sie ihre Eigenschaften auch im transformierten Koordinatensystem behält, so dass die Gleichung in jedem Inertialsystem gilt. Ob die Dirac-Gleichung das erfüllt, wird im folgenden Kapitel untersucht.

## 2.2 Lorentz-Kovarianz der Dirac-Gleichung

Die Transformation zweier Inertialsysteme ineinander, wird durch die Lorentz-Transformation ausgedrückt. Zwei gleichförmig bewegte Bezugssysteme müssen dabei durch eine lineare Transformation zusammenhängen. Die inhomogene Lorentz-Transformation hat deshalb die Gestalt:

$$x^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu \quad (24)$$

Die homogene Lorentz-Transformation ist durch  $a^\mu = 0$  gegeben, wobei  $a^\mu$  einen Translationsvektor darstellt. Für die Transformationsmatrizen  $\Lambda$  gilt die Gleichung:

$$\Lambda^\lambda_\mu g^{\mu\nu} \Lambda^\rho_\nu = g^{\lambda\rho} \quad (25)$$

Dieser Zusammenhang führt zu den Eigenschaften, welche die Lorentz-Transformationen klassifizieren.

$$\det\Lambda = \pm 1 \quad (26)$$

$$\Lambda_0^0 \geq 1 \quad \text{oder} \quad \Lambda_0^0 \leq -1 \quad (27)$$

Im Folgenden betrachten wir zwei Inertialsysteme I und I' mit Wellenfunktionen  $\psi$  und  $\psi'$  eines Teilchens im jeweiligen System. Die Transformation zwischen I und I' ist durch (24) gegeben. Dabei ist gefordert, dass der transformierte Zustand  $\psi'$  rekonstruierbar aus dem ursprünglichen Zustand  $\psi$  ist.

Das erfordert folgenden Zusammenhang:

$$\psi'(x') = F[\psi(x)] = F[\psi(\Lambda^{-1}(x' - a))] \quad (28)$$

Auch für die Dirac-Gleichung gilt das Relativitätsprinzip, das besagt, dass Naturgesetze in allen Inertialsystemen gleichermaßen gelten. Zusammen mit der Forderung der Rekonstruierbarkeit (28), folgert man die Forminvarianz der Dirac-Gleichung:

$$I : \left( -i\gamma^\mu \partial_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0 \quad (29)$$

$$I' : \left( -i\gamma^\mu \partial'_\mu + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi' = 0 \quad (30)$$

Die Gleichung in einem transformierten Inertialsystem I' muss somit durch Transformation aus der Gleichung im ungestrichenen Inertialsystem I hervorgehen. Damit unsere Wellenfunktion weiterhin der linearen DE genügt, muss auch die Transformation linearer Gestalt sein:

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x) \quad (31)$$

mit der inverse Transformation:

$$S(\Lambda)^{-1} \psi'(x') = \psi(x) \quad (32)$$

Indem man nun (32) in die Gleichung (29) einsetzt, erhält man mit dem Ableitungsoperator

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda_\mu^\nu \partial'_\nu \quad (33)$$

eine Gleichung der Form:

$$\left( -i\gamma^\mu \Lambda_\mu^\nu \partial'_\nu + \frac{mc}{\hbar} \right) S(\Lambda)^{-1} \psi'(x') = 0 \quad (34)$$

Multipliziert man diese Gleichung nun mit  $S(\Lambda)$  von rechts, erhält man:

$$\left( -iS(\Lambda) \Lambda_\mu^\nu \gamma^\mu S(\Lambda)^{-1} \partial'_\nu + \frac{mc}{\hbar} \right) \psi'(x') = 0 \quad (35)$$

Der Vergleich von Gleichung (35) mit (30) ergibt somit die Bedingung:

$$S(\Lambda) \Lambda_\mu^\nu \gamma^\mu S(\Lambda)^{-1} = \gamma^\nu \quad (36)$$

$$\Leftrightarrow S(\Lambda)^{-1} \gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda_\mu^\nu \gamma^\mu \quad (37)$$

Die Dirac-Gleichung ist invariant unter Lorentz-Transformation, falls diese Bedingung erfüllt ist. Da die  $\gamma$ -Matrizen die Clifford-Algebra erfüllen, sind sie darstellbar in der Form  $M\gamma M^{-1}$  mit invertierbaren Matrizen  $M$ . Diese sind, bis auf eine Konstante, eindeutig bestimmt. Da nichtsinguläre Lösungen für die Matrizen  $S(\Lambda)$  existieren, die Bedingung (37) ist somit erfüllt.

### 3 Lösung der Dirac-Gleichung

Betrachtet man ein ruhendes Teilchen mit  $k=0$ , fallen die Impuls-Terme der Gleichung (12) weg und sie reduziert sich zu:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = (mc^2 \beta) |\psi\rangle \quad (38)$$

Mit dem Ansatz der Exponentialfunktion kommt man auf vier Lösungen der Form:

$$\psi^{(+)} = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^{(+)} = e^{-\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$\psi^{(-)} = e^{\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^{(-)} = e^{\frac{imc^2}{\hbar}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Wir erhalten also zwei Lösungen mit positiver und zwei mit negativer Energie. Dieses Problem ist uns schon bei der KGE begegnet.

Analog dazu erhalten wir für ein bewegtes Teilchen die Lösungen:

- positive Energie:

$$\psi_{1,2}^{(+)} = e^{-i(cp_0t - \vec{p}\vec{x})/\hbar} \begin{pmatrix} \chi_{1,2} \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}\chi_{1,2}}{p_0 + mc} \end{pmatrix} \quad (41)$$

- negative Energie:

$$\psi_{1,2}^{(-)} = e^{i(cp_0t - \vec{p}\vec{x})/\hbar} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma}\vec{p}\chi_{1,2}}{p_0 + mc} \\ \chi_{1,2} \end{pmatrix} \quad (42)$$

mit  $p_0 = \sqrt{p^2 + m^2 c^2} > 0$ ,  $E^2 = c^2 p_0^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$

Die  $\chi_{1,2}$  stellen dabei jeweils zwei linear unabhängige, zweikomponentige Spinore dar. Da wir nur freie Teilchen betrachten, enthalten diese Spinore den Spin-Operator als internen Freiheitsgrad mit Quantenzahl  $\frac{1}{2}$ . Die Dirac-Gleichung ist somit zur Beschreibung von Spin-1/2-Teilchen, also auch Elektronen, geeignet. Die Lösungen mit negativer Energie konnten nicht als Teilchenwellenfunktion interpretiert werden. Sie müssen dennoch berücksichtigt werden, da sonst die Basis des Hilbertraumes unvollständig wäre. Um diesen Lösungen eine physikalische Bedeutung zuzuordnen, entwickelte Dirac die sogenannte Löchertheorie, deren Konzept im Folgenden vorgestellt wird.

## 4 Löchertheorie

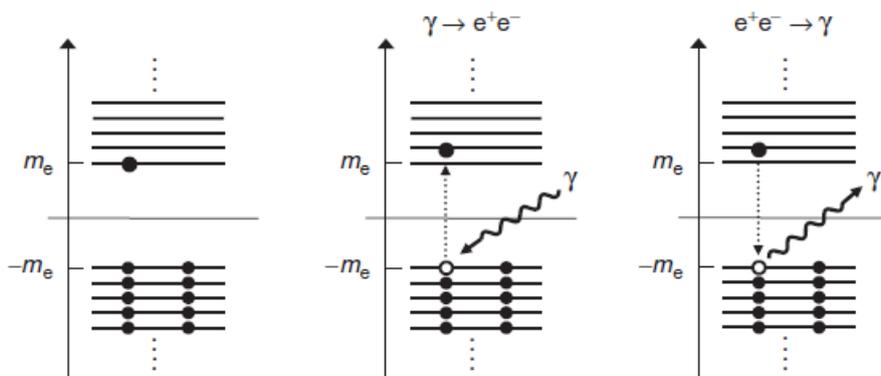


Abbildung 1: Links: Lösungen der DE mit positiven und negativen Energien, worin alle negativen Zustände besetzt sind. Mitte: Prozess der Paarbildung. Rechts: Prozess der Paarvernichtung [4]

Im Jahre 1930 formulierte Dirac seine Theorie der Löcher. Darin postuliert er, dass alle Zustände negativer Energie, nach dem Pauli-Prinzip, besetzt seien. Er interpretiert das Vakuum als eine Zustand, in dem alle negativen Energiezustände besetzt, und alle positiven Energiezustände unbesetzt sind. Das Elektron kann in diesem Fall nie die untere Energiegrenze von Null unterschreiten.

Ist jedoch ein negativer Zustand unbesetzt, also ein Loch im Dirac-See<sup>3</sup>, kann das Elektron unter Abgabe von Energie in diesen unbesetzten Zustand fallen. Dieser Prozess wird als Annihilation bezeichnet. Das Elektron-Positron-Paar verschwindet, wie in Abbildung (1) (Rechts) zu sehen ist. Analog dazu kann ein Elektron durch Aufnahme von Energie in einen positiven Energiezustand wechseln (Abb. (1), Mitte), wodurch ein Elektron-Positron-Paar erzeugt wird.

<sup>3</sup> ein unbesetzter Zustand entspricht einem Teilchen mit entgegengesetzter Ladung, dem sogenannten Positron

## 5 Anhang

### 5.1 Graphen

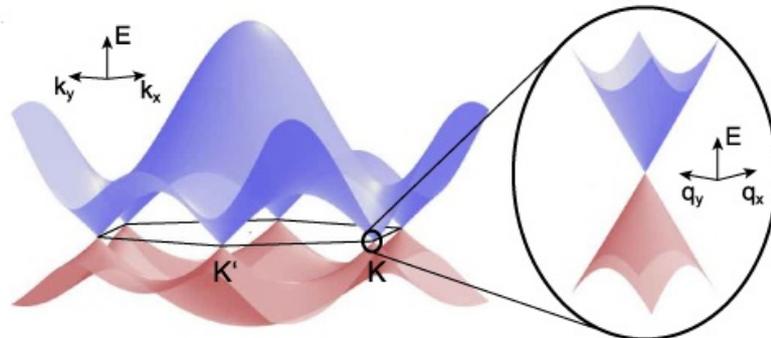


Abbildung 2: Bandstruktur von Graphen [6]

Graphen ist eine einatomige Schicht von Graphit, in dem Kohlenstoff-Atome in einem hexagonalen Gitter angeordnet sind. In Abbildung (2) ist die Bandstruktur von Graphen abgebildet. Wie man erkennen kann, berühren sich das Leitungs- und Valenzband in sechs Punkten, den sogenannten K-Punkten oder Dirac-Punkten. In dieser Umgebung ist ein linearer Zusammenhang zwischen Energie und Impuls zu erkennen. Solch eine lineare Energie-Impuls-Beziehung sagt auch die Dirac-Gleichung für relativistische Teilchen voraus. Anhand von Graphen war es also erstmals möglich, die korrekte Beschreibung der Dirac-Gleichung experimentell zu bestätigen.

## 6 Quellenverzeichnis

- [1] Franz, Schwabl: Quantenmechanik für Fortgeschrittene, 4.Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg
- [2] Stepanow, Semjon: Relativistische Quantentheorie, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010
- [3] Wolschin, Georg: Relativistische Quantenmechanik, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016
- [4] Thompson, Modern Particle Physics 2013, Cambridge University Press, New York
- [5] <https://de.wikipedia.org/wiki/Graphen> Mark
- [6] J. Guttinger *et al*, Transport through graphene quantum dots, Rep. Prog. Phys. **75** (2012) 126502,