

Dirac-Gleichung - Elektronen im elektromagnetischen Feld

David Elsing

15.12.2017

Zusammenfassung

Die Dirac-Gleichung kann durch die minimale Kopplung in eich- und lorentzinvarianter Weise ein elektromagnetisches Feld einbeziehen.

Hieraus ergibt sich im nicht-relativistischen Grenzfall die Pauli-Gleichung und der g -Faktor von 2 für Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen ohne Substruktur, was bis auf quantenelektrodynamische Abweichungen auch gemessen wird.

Durch die exakte Lösung im Coulomb-Potential erhält man die Feinstruktur-niveaus, welche wasserstoffähnliche Atome um einiges besser als das Bohr-Modell (bzw. die nicht-relativistischen Schrödingergleichung) beschreibt und die l -Entartung erhält.

Eine aktuelle Anwendung der Dirac-Gleichung ist, wie schon im letzten Vortrag gezeigt, die Beschreibung von Dirac-Quasiteilchen in Graphen. Mithilfe der minimalen Kopplung lassen sich die Landau-Niveaus in einem konstanten Magnetfeld berechnen, welche proportional zu \sqrt{N} mit $N \in \mathbb{N}_0$ und der Zyklotronfrequenz sind.

1 Einleitung

1.1 Freie Dirac-Gleichung

Im vorherigen Vortrag wurde die Dirac-Gleichung für freie Elektronen, insbesondere ohne elektromagnetisches Feld, behandelt. In Diracs Originalarbeit [1] ist diese, mit negativem Vorzeichen, gegeben als

$$(\hat{E} - \alpha^1 \hat{p}^1 - \alpha^2 \hat{p}^2 - \alpha^3 \hat{p}^3 - m\beta)\psi = 0 : \quad (1)$$

mit Elektronenmasse m , Energieoperator $\hat{E} = i\frac{\partial}{\partial t}$, Impulsoperatoren $\vec{\hat{p}} = -i\vec{\nabla}$ und vektorwertiger, 4-dimensionaler Wellenfunktion ψ , siehe [9]. Sie ist, im Gegensatz zur nicht-relativistischen Schrödinger-Gleichung und zur Klein-Gordon-Gleichung, linear in den Ableitungen nach Zeit und Ort. Die 4×4 -Matrizen α_1 , α_2 , α_3 und β sind dabei:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

wobei die Dirac-Darstellung verwendet wird.
Mit

$$\gamma^0 = \beta \quad \gamma^i = \beta\alpha^i$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wird, mit der Feynman-Slash-Notation $\not{\partial} = \gamma_\mu \partial^\mu$, aus Gl. 1 durch Multiplikation mit β :

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0 \quad (2)$$

$$= (\gamma^0 \hat{E} + \gamma^i \hat{p}_i - m)\psi \quad (3)$$

Durch Multiplizieren mit $(i\not{\partial} + mc)$ erhält man die Klein-Gordon-Gleichung für jede Komponente.

2 Minimale Kopplung

Wie in der nichtrelativistischen Quantenmechanik wird ein elektromagnetisches Feld durch die Ersetzungen

$$\hat{H} \rightarrow \hat{H} + qA_0 \quad (4)$$

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A} \quad (\text{Kinetischer Impuls}), \quad (5)$$

also

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu \quad (6)$$

mit Vierpotential $A_\mu = \begin{pmatrix} \Phi \\ \vec{A} \end{pmatrix}$ einbezogen, siehe [7]. Hierdurch wird die Dirac-Gleichung (1) zu

$$(i\not{\partial} - q\not{A} - m)\psi(x) = 0 \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow (\gamma^0 \hat{E} + \gamma^i \hat{p}_i - \gamma^\mu qA_\mu - m)\psi = 0 \quad (8)$$

2.1 Eichinvarianz

Neben der Herleitung aus der klassischen Elektrodynamik kann man auch die Eichtransformation

$$\psi(x) \rightarrow e^{ie\alpha(x)}\psi(x), \quad (9)$$

betrachten, welche Ausdrücke, die nur von ψ und ψ^\dagger enthalten, unverändert lässt, allerdings ist dann

$$\partial_\mu(e^{ie\alpha(x)}\psi(x)) = e^{ie\alpha(x)}(\partial_\mu + ie\partial_\mu\alpha(x))\psi(x), \quad (10)$$

was durch Einführen einer „kovarianten Ableitung“ behoben werden kann,

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu(x) \quad (11)$$

welche durch die Eichtransformation $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu\alpha(x)$ gewährleistet, dass

$$D_\mu\psi(x) \rightarrow e^{ie\alpha(x)}D_\mu\psi(x) \quad (12)$$

(siehe [9], Kapitel 5.1).

Dies entspricht eben der „Minimalen Kopplung“ in Gl. 8.

3 Nichtrelativistischer Grenzfall [9]

In der Dirac-Darstellung sind die γ -Matrizen, durch die Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ausgedrückt:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Schreibt man das Viererpotential in Gl. 8 aus, erhält man

$$\gamma^0(\hat{E} - q\Phi)\psi + \gamma^i(\hat{p}_i - qA_i)\psi = m\psi. \quad (13)$$

Wenn man $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ mit zweikomponentigen Bispinoren φ und χ schreibt, wird hieraus

$$(\hat{E} - q\Phi)\gamma^0 \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} + (\hat{p}_i + qA_i)\gamma^i \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (14)$$

wobei \hat{p}_i und \hat{A}_i in kovarianter Weise geschrieben sind, und durch die Pauli-Matrizen ausgedrückt

$$\begin{pmatrix} (\hat{E} - q\Phi)\varphi - \sum_i(\hat{p}_i - qA_i)\sigma_i\chi \\ -(\hat{E} - q\Phi)\chi + \sum_i(\hat{p}_i + qA_i)\sigma_i\varphi \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (15)$$

wobei hier die \hat{p}_i und die A_i nicht mehr mit der Lorentzmetrik multipliziert werden. Durch Auflösen der 2. Komponente nach χ ergibt sich

$$\chi = \frac{-\sum_i (\hat{p}_i - qA_i)\sigma_i}{m + \hat{E} - q\Phi} \varphi. \quad (16)$$

In der nicht-relativistischen Näherung ist jetzt $m + \hat{E} - q\Phi \approx 2m$, also

$$\chi \approx \frac{-\sum_i (\hat{p}_i - qA_i)\sigma_i}{2m} \varphi. \quad (17)$$

und deswegen $\chi \ll \varphi$. φ wird „große“ und χ „kleine“ Komponente genannt, wobei letztere dem Antiteilchenanteil (negativer Energie) entspricht, welcher in der klassischen Näherung sehr klein ist. Setzt man dies jetzt in die 1. Komponente von Gl. 15 ein, wird diese zu

$$(\hat{E} - m)\varphi = \left(\frac{\left(\sum_i (\hat{p}_i - qA_i)\sigma_i \right)^2}{2m} + q\Phi \right) \varphi. \quad (18)$$

Mit

$$\begin{aligned} (\hat{p}_i - qA_i)\sigma_i(\hat{p}_k - qA_k)\sigma_k &= \underbrace{\sigma_i\sigma_k}_{=\delta_{ik} + i\epsilon_{ikl}\sigma_l} \overbrace{(\hat{p}_i \hat{p}_k - q(\hat{p}_i A_k + A_i \hat{p}_k) + q^2 A_i A_k)}^{\text{wirkt auch auf die Wellenfkt.}} \\ &= \hat{p}^2 - 2q\vec{p}\vec{A} + q^2 \vec{A}^2 - i\epsilon_{ikl}q(\hat{p}_i A_k + A_i \hat{p}_k)\sigma_l \\ &= (\hat{\vec{p}} - q\vec{A})^2 - q(\vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{\nabla})\vec{\sigma} = (\hat{\vec{p}} - q\vec{A})^2 - q\underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{A})}_{=\vec{B}}\vec{\sigma} \end{aligned}$$

wird Gl. 18 zur

3.1 Pauli-Gleichung

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m}(\hat{\vec{p}} - q\vec{A})^2 - \frac{q}{2m}\vec{\sigma}\vec{B} + q\Phi \right) \varphi \quad (19)$$

Diese entspricht einer Schrödingergleichung für einen zweikomponentigen Spinor mit Spinanteil am Hamiltonoperator. Vergleicht man

$$\hat{H}_{\text{magn}} = -\frac{q\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\vec{B} \quad (20)$$

mit

$$\hat{H}_{\text{magn}} = -\vec{\mu}\vec{B}, \quad (21)$$

wobei $\vec{\mu}$ das magnetische Moment des Teilchens ist, welches in Analogie zu einer sich im Kreis drehenden Punktladung mit Spin-Drehimpuls \vec{S} anstatt dem Bahndrehimpuls \vec{L} gegeben ist durch

$$\vec{\mu} = g \frac{q}{2mc} \vec{S} = g \frac{q\hbar}{4mc} \vec{\sigma}, \quad (22)$$

sieht man, dass

$$g = 2 \quad (23)$$

3.2 Messwerte für g

Messwerte für g von Elektron und Myon sind (CODATA 2014 [11]):

$$\begin{aligned} g_{\text{Elektron}} &= 2.00231930436182 \pm 5.2 \cdot 10^{-13} \\ g_{\text{Myon}} &= 2.0023318418 \pm 1.3 \cdot 10^{-9} \end{aligned}$$

Die Vorhersage aus der Dirac-Gleichung ist also ziemlich gut. Die Abweichungen von 2 können (hauptsächlich) durch die Quantenelektrodynamik erklärt werden und sind Tests für diese. Wegen der größeren Masse von Myonen ist die Abweichung hier größer.

Grober Messaufbau der Messung für Myonen [3]

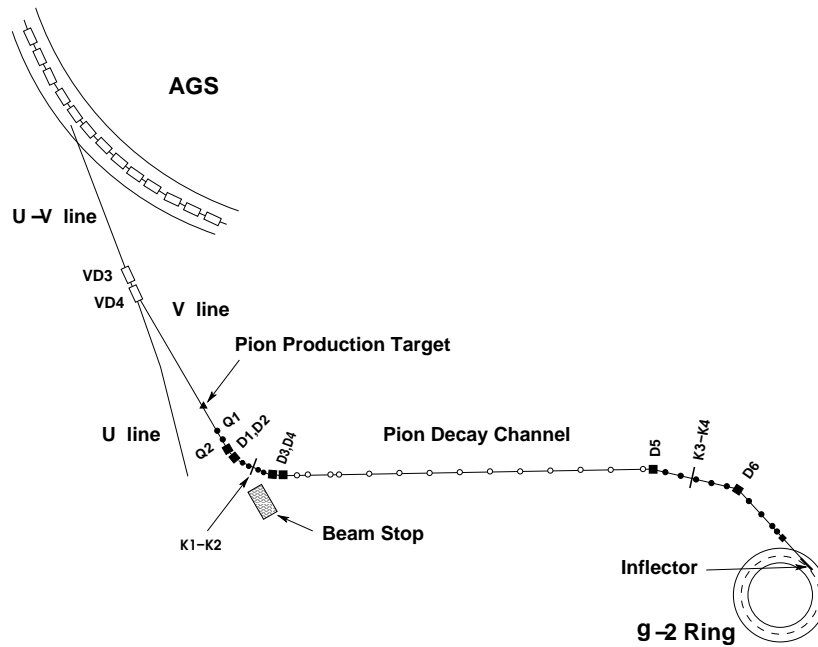


FIG. 3: Plan view of the pion/muon beamline. The pion decay channel is 80 m and the ring diameter is 14.1 m.

1

¹[3]

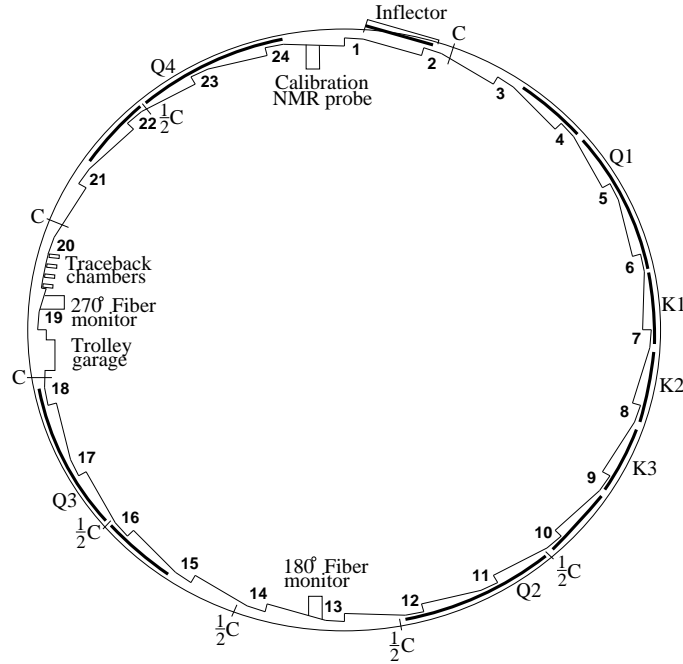


FIG. 8: The $(g-2)$ storage ring layout. The 24 numbers represent the locations of the calorimeters immediately downstream of the scalloped vacuum chamber subsections. Inside the vacuum are four quadrupole sections (Q1-Q4), three kicker plates (K1-K3) and full-aperture (C) and half-aperture ($\frac{1}{2}C$) collimators. The traceback chambers follow a truncated scalloped vacuum chamber subsection.

2

Zunächst werden Pionen z.B. durch einen von Protonen ausgelösten hadronischen Schauer in Materie produziert und durch ein Magnetfeld abgelenkt. Negative Pionen zerfallen in Myonen und Antimyonenneutrinos ($\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$), wobei die Myonen in einen Ring geleitet werden, wo sie mithilfe von elektrischen Quadrupolfeldern und einem konstanten Magnetfeld gespeichert werden. In diesem Magnetfeld präzisiert ihr Spin, was abhängig vom g -Faktor ist. Durch die schwache Wechselwirkung zerfallen die Myonen nach ca. $2.2 \mu\text{s}$ in Elektronen und Neutrinos ($\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$), wobei die Elektronen unter der Paritätsverletzung der schwachen Wechselwirkung in Abhängigkeit des Spins zerfallen. Dies wird mithilfe von Kalorimetern gemessen, wodurch sich der g -Faktor des Myons berechnen lässt.

²[3]

4 Exakte Lösung im Zentralpotential [4]

Zum Dirac-Hamiltonoperator wird ein Zentralpotential $V(r)$ addiert:

$$\hat{H} = \vec{\alpha}\hat{p} + \beta m + V(r) \quad (24)$$

mit $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$. Hier wird ein stationärer Zustand betrachtet, also wird die Dirac-Gleichung zur Eigenwertgleichung

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad (25)$$

4.1 Operatoren mit Eigenwerten, Quantenzahlen

Der Bahndrehimpulsoperator

$$\hat{L} = \vec{r} \times \hat{p} \quad (26)$$

kommutiert wegen $[\hat{p}_l, r_j \hat{p}_k] = -i\delta_{lj}\hat{p}_k$ nicht mit \hat{H} :

$$[\hat{H}, \hat{L}] = -i\vec{\alpha} \times \hat{p} \quad (27)$$

Ebenso nicht der Spinoperator

$$\hat{S} = \frac{1}{2}\vec{\Sigma}, \quad (28)$$

$$\Sigma_i = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \quad (29)$$

weil $[\alpha_i, \Sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\alpha_k$:

$$[\hat{H}, \hat{S}] = i\vec{\alpha} \times \hat{p}. \quad (30)$$

Aber $\hat{S}^2 = \frac{3}{4}\mathbf{1}$ und kommutiert damit mit \hat{H} .

An Gl. 27 und Gl. 30 sieht man, dass der Gesamtdrehimpulsoperator

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S} \quad (31)$$

mit \hat{H} kommutiert. Auch kommutiert \hat{J}^2 mit \hat{H} und mit \hat{J} , aber die Komponenten von \hat{J} kommutieren nicht miteinander, weswegen gleichzeitige Eigenvektoren $j(j+1)$ von \hat{J}^2 und m_j von einer Komponente von \hat{J} , genannt \hat{J}_z , gesucht werden.

Setzt man in eine Lorentztransformation eine Raumspiegelung ein und wendet diese auf die Dirac-Gleichung an, ergibt sich ein relativistischer Paritätsoperator

$$\hat{P} = \beta \hat{P}_{\text{nr}} \quad (32)$$

mit dem nicht-relativistischen Paritätsoperator P_{nr} . Wegen $\hat{P}_{\text{nr}} \hat{p}_i = -\hat{p}_i \hat{P}_{\text{nr}}$ und $\beta \alpha_i = -\alpha_i \beta$ ist $[\hat{P}, \hat{H}] = 0$.

Definiert man einen „radialen Impulsoperator“

$$\hat{p}_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r = \frac{1}{r} (\vec{r} \hat{p} - i) \quad (33)$$

und

$$\hat{\alpha}_r = \frac{1}{r} \vec{\alpha} \vec{r}, \quad (34)$$

sieht man, dass wegen

$$\alpha_i \alpha_j = \begin{pmatrix} \sigma_i \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_i \sigma_j \end{pmatrix} = \delta_{ij} \mathbb{1}_4 + i \epsilon_{ijk} \Sigma_k :$$

$$(\vec{\alpha} \vec{r})(\vec{\alpha} \hat{p}) = \alpha_i r_i \alpha_j \hat{p}_j \quad (35)$$

$$= \vec{r} \hat{p} + i \vec{\Sigma} \hat{L} = r \hat{p}_r + i (\vec{\Sigma} \hat{L} + 1) \quad (36)$$

$$\implies \vec{\alpha} \hat{p} = \hat{\alpha}_r \left(\hat{p}_r + \frac{i}{r} (\vec{\Sigma} \hat{L} + 1) \right) = \hat{\alpha}_r \hat{p}_r + i \frac{\hat{\alpha}_r}{r} \beta \hat{K} \quad (37)$$

mit dem Operator

$$\hat{K} = \beta (\vec{\Sigma} \hat{L} + 1), \quad (38)$$

welcher ebenfalls mit \hat{H} kommutiert. Hierdurch wird der Hamiltonoperator (Gl. 24) zu

$$\hat{H} = \hat{\alpha}_r \hat{p}_r + i \frac{1}{r} \hat{\alpha}_r \beta \hat{K} + \beta m + V(r) \quad (39)$$

Betrachtet man

$$\vec{\Sigma}\hat{L} = 2\hat{S}\hat{L} = \hat{J}^2 - \hat{L}^2 - \underbrace{\hat{S}^2}_{=\frac{3}{4}\mathbf{1}},$$

so ist

$$\hat{K} = \beta(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 + \frac{1}{4}\mathbf{1}), \quad (40)$$

und weil \hat{K} , \hat{J}^2 und $\frac{1}{4}\mathbf{1}$ Eigenwerte haben, haben auch jeweils die 1. und 2. Komponente und die 3. und 4. Komponente Eigenwerte bezüglich \hat{L}^2 . Die Eigenwertgleichungen sind also

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi &= E\psi \\ \hat{J}^2\psi &= j(j+1)\psi, \quad \hat{J}_z\psi = m_j\psi \\ \hat{L}^2 \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} l(l+1)\psi_A \\ l'(l'+1)\psi_B \end{pmatrix} \\ \hat{S}^2\psi &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1)\psi \\ \hat{K}\psi &= \kappa\psi \\ \hat{P}\psi &= \pm\psi, \quad \hat{P}_{\text{nr}} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} \psi_A \\ -\psi_B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus der nicht-relativistischen Quantenmechanik ist bekannt, dass für die beiden Spinoren ψ_A und ψ_B der Winkelanteil der Lösung mit

$$\chi_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$\chi_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (42)$$

die gleichzeitigen Eigenfunktionen der zweikomponentigen Drehimpulsoperatoren sind:

$$\mathcal{Y}_{l, \frac{1}{2}}^{j, m_j} = \sum_{m_l, m_s} \underbrace{\langle l \ s \ m_l \ m_s | j \ m_j \rangle}_{\text{Clebsch-Gordan-Koeffizient}} \overbrace{Y_{l, m_l}(\theta, \varphi)}^{\text{Kugelflächenfunktion}} \chi_{\frac{1}{2}, m_s} \quad (43)$$

und damit

$$\psi_A \propto \mathcal{Y}_{l, \frac{1}{2}}^{j, m_j} \quad (\text{Parität } (-1)^l) \quad (44)$$

$$\psi_B \propto \mathcal{Y}_{l', \frac{1}{2}}^{j, m_j} \quad (\text{Parität } (-1)^{l'}) \quad (45)$$

mit $l, l' = j \pm \frac{1}{2}$. Wegen der unterschiedlichen Parität bezüglich \hat{P}_{nr} ist $l' = l \pm 1$.

Wenn man die Eigenwerte von $\hat{K} = \beta(\hat{J}^2 - \hat{L}^2 + \frac{1}{4}\mathbf{1})$ für ψ_A und ψ_B getrennt anschaut, sieht man, dass

$$\kappa = j(j+1) - l(l+1) + \frac{1}{4} = \begin{cases} l+1, & j = l + \frac{1}{2} \\ -l, & j = l - \frac{1}{2} \end{cases} \quad (46)$$

$$-\kappa = j(j+1) - l'(l'+1) + \frac{1}{4} = \begin{cases} -l', & j = l' - \frac{1}{2} \\ l'+1, & j = l' + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (47)$$

Deswegen sind j , l und l' eindeutig durch κ gegeben:

$$j = |\kappa| - \frac{1}{2} \quad (48)$$

$$l = \begin{cases} \kappa - 1, & \kappa > 0 \\ -\kappa, & \kappa < 0 \end{cases} \quad (49)$$

$$l' = \begin{cases} \kappa, & \kappa > 0 \\ -\kappa + 1, & \kappa < 0 \end{cases} \quad (50)$$

und damit $\kappa \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Mit den radialen Funktionen $P_{E, \kappa}(r)$ und $Q_{E, \kappa}(r)$ sind die allgemeinen Lösungen von der Form

$$\psi_{E, \kappa, m_j} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} P_{E, \kappa}(r) \mathcal{Y}_{l, \frac{1}{2}}^{j, m_j} \\ i Q_{E, \kappa}(r) \mathcal{Y}_{l', \frac{1}{2}}^{j, m_j} \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Der Faktor $\frac{1}{r}$ kürzt sich damit mit dem in $\hat{p}_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r$, und das i vor $Q_{E, \kappa}$ macht die Differentialgleichungen für die Radialfunktionen reell. Diese ergeben sich, wenn man Gl. 51 in Gl. 24 einsetzt, zu

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\kappa}{r} \right) Q_{E\kappa}(r) = -(E - m - V(r)) P_{E\kappa}(r) \quad (52)$$

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{\kappa}{r} \right) P_{E\kappa}(r) = (E + m - V(r)) Q_{E\kappa}(r) \quad (53)$$

4.2 Coulomb-Potential

Jetzt wird ein Coulomb-Potential

$$V(r) = -\frac{Z\alpha}{r} \quad (54)$$

mit der Feinstrukturkonstanten $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ betrachtet. Mit der Definition $\rho = \nu r$ mit $\nu = m\sqrt{1 - \frac{E^2}{m^2}}$ werden Gl. 52 und Gl. 53 zu

$$\left(\frac{d}{d\rho} + \frac{\kappa}{\rho}\right)Q_{E,\kappa}(\rho) = \left(\frac{m}{\nu}\left(1 - \frac{E}{m}\right) - \frac{Z\alpha}{\rho}\right)P_{E,\kappa}(\rho) \quad (55)$$

$$\left(\frac{d}{d\rho} - \frac{\kappa}{\rho}\right)P_{E,\kappa}(\rho) = \left(\frac{m}{\nu}\left(1 + \frac{E}{m}\right) + \frac{Z\alpha}{\rho}\right)Q_{E,\kappa}(\rho) \quad (56)$$

Für große ρ gehen die $\frac{1}{\rho}$ -Terme gegen 0, also

$$\frac{d}{d\rho}Q_{E,\kappa}(\rho) \approx \frac{m}{\nu}\left(1 - \frac{E}{m}\right)P_{E,\kappa}(\rho) \quad (57)$$

$$\frac{d}{d\rho}P_{E,\kappa}(\rho) \approx \frac{m}{\nu}\left(1 + \frac{E}{m}\right)Q_{E,\kappa}(\rho) \quad (58)$$

$$\implies \frac{1}{\frac{m}{\nu}\left(1 + \frac{E}{m}\right)}\frac{d^2}{d\rho^2}P_{E,\kappa}\rho = \frac{m}{\nu}\left(1 - \frac{E}{m}\right)P_{E,\kappa}(\rho) \quad (59)$$

$$\implies \frac{d^2}{d\rho^2}P_{E,\kappa}(\rho) = P_{E,\kappa}(\rho) \quad (60)$$

und genauso für $Q_{E,\kappa}$.

Das ist einfach eine Exponentialfunktion, und weil $\lim_{\rho \rightarrow \infty} P_{E,\kappa}(\rho) \stackrel{!}{=} 0$, damit die Lösung normierbar ist:

$$P_{E,\kappa}(\rho) \rightarrow a_1 e^{-\rho} \quad (61)$$

$$Q_{E,\kappa}(\rho) \rightarrow a_2 e^{-\rho} \quad (\text{analog}) \quad (62)$$

mit

$$\frac{a_1}{a_2} = -\frac{m}{\nu}\left(1 + \frac{E}{m}\right) = -\sqrt{\frac{1 + \frac{E}{m}}{1 - \frac{E}{m}}}. \quad (63)$$

4.2.1 Ansatz für die Radialfunktionen

Also kann man die Radialfunktionen schreiben als

$$P_{E,\kappa}(\rho) = N\sqrt{1 + \frac{E}{m}}e^{-\rho}f(\rho) \quad (64)$$

$$Q_{E,\kappa}(\rho) = -N\sqrt{1 - \frac{E}{m}}e^{-\rho}g(\rho) \quad (65)$$

$$(66)$$

mit Funktionen $f(\rho)$ und $g(\rho)$ mit $\lim_{\rho \rightarrow \infty} f(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} g(\rho) = 1$. Für diese kann man eine Reihenentwicklung aufschreiben:

$$f(\rho) = \rho^s \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k, \quad c_0 \neq 0 \quad (67)$$

$$g(\rho) = \rho^{s'} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \rho^k, \quad d_0 \neq 0. \quad (68)$$

Weil $P_{E,\kappa}$ und $Q_{E,\kappa}$ für $\rho \rightarrow_{\infty}^0$ proportional werden, werden dies auch $f(\rho)$ und $g(\rho)$, und damit muss $s = s'$ sein.

4.2.2 Energieeigenwerte

Durch Einsetzen in Gl. 55 und Gl. 56 erhält man gekoppelte Rekursionsbedingungen für die c_k und d_k für jede Potenz von ρ :

$$-\sqrt{1 - \frac{E}{m}}(-\rho \sum_{k=0}^{\infty} d_k \rho^k + s \sum_{k=0}^{\infty} d_k \rho^k + \sum_{k=0}^{\infty} k d_k \rho^k + \kappa \sum_{k=0}^{\infty} d_k \rho^k) \quad (69)$$

$$= (\rho \frac{m}{\nu} (1 - \frac{E}{m}) - Z\alpha) \sqrt{1 + \frac{E}{m}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k$$

$$\sqrt{1 + \frac{E}{m}}(-\rho \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k + s \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k + \sum_{k=0}^{\infty} k c_k \rho^k - \kappa \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k) \quad (70)$$

$$= -(\rho \frac{m}{\nu} (1 + \frac{E}{m}) + Z\alpha) \sqrt{1 - \frac{E}{m}} \sum_{k=0}^{\infty} d_k \rho^k$$

Für die 0. Potenz von ρ erhält man s :

$$s = \pm \sqrt{\kappa^2 - Z^2 \alpha^2}. \quad (71)$$

Wenn aber $P_{E,\kappa}(0) = Q_{E,\kappa}(0) = 0$ sind, damit ψ in Gl. 51 nicht unendlich wird, kann nur die positive Lösung von s verwendet werden. Für $Z \leq \frac{1}{\alpha} \approx 137$ funktioniert der Ansatz eines perfekten Coulomb-Potentials einer Punktladung nicht mehr, weil die Bedingung für s nicht mehr erfüllt werden kann. Hier werden auch die Energieeigenwerte komplex.

Damit $P_{E,\kappa}$ und $Q_{E,\kappa}$ im Unendlichen verschwinden, müssen die Reihen in Gl. 67 und Gl. 68 abbrechen. Dies ist wegen den Rekursionsbedingungen in Gl. 69 und Gl. 70 nur, mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, bei den Energieeigenwerten

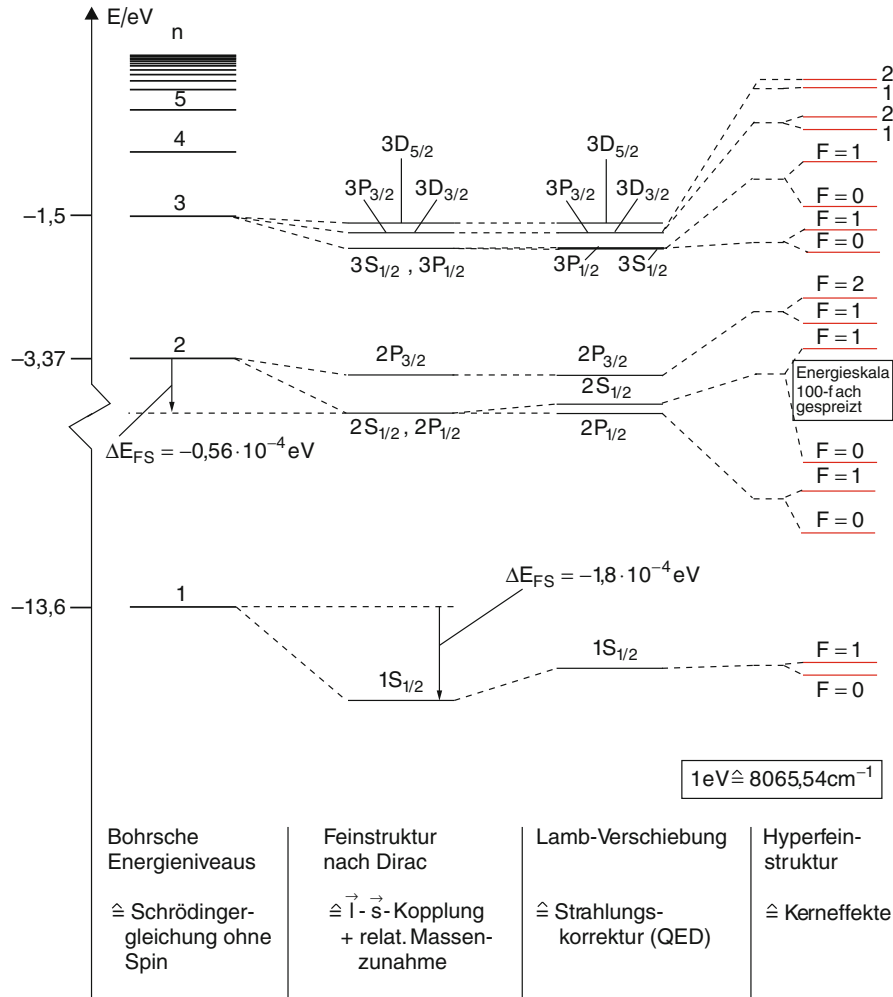
$$E_{nj}^D = \frac{m}{\sqrt{1 + \left(\frac{Z\alpha}{n - j - \frac{1}{2} + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^2 - Z^2\alpha^2}} \right)^2}} \quad (72)$$

möglich, welche die Feinstrukturenergieniveaus sind. Die l -Entartung bleibt erhalten, und E hängt nur von der Hauptquantenzahl n , durch die die Lösungen der Rekursionsbedingungen charakterisiert werden, sowie von der Gesamtdrehimpulsquantenzahl j . Durch eine Taylor-Entwicklung erhält man Korrekturen für die Bohr-Energieniveaus:

$$E \approx \underbrace{m}_{\text{Ruheenergie}} + \underbrace{-\frac{m\alpha^2}{2n^2}}_{\text{Bohr-Energieniveaus}} - \underbrace{\frac{m\alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right)}_{\text{Korrektur } \propto \alpha^4} \quad (73)$$

4.3 Termschemas

4.3.1 Wasserstoff

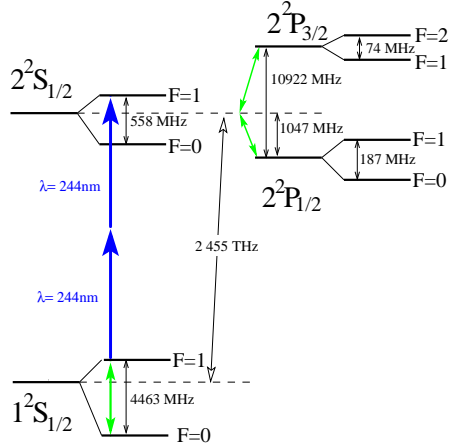


3

Hier sind die Energieniveaus in Wasserstoff zu sehen. Den Hauptunterschied zu den Bohr-Energieniveaus machen die Feinstruktur-niveaus aus. Man sieht die l -Entartung der Dirac-Niveaus, welche durch den Lambshift aufgehoben wird. Außerdem gibt es noch Verschiebungen durch Kopplung mit dem Kernspin in der Hyperfeinstruktur.

³W. Demtröder. Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper. [6]

4.3.2 Muonium ($\mu^+ + e^-$)



$$E_{\text{tot}}(n, j, l, F) = E_D(n, j) + E_{\text{RM}}(n, j, l) \\ + E_{\text{QED}}(n, j, l) + E_{\text{HFS}}(n, j, l, F, I) \\ (+ E_{\text{weak}} + E_{\text{exotic}})$$

Fig. 1. Muonium atom $n=1$ and $n=2$ energy levels.¹¹ All indicated transitions have been observed. The ground state hyperfine interval and the $1^2S_{1/2}, F=1-2^2S_{1/2}, F=1$ transition have been measured and calculated very precisely. The transitions within the excited states could be demonstrated.

4

Bei Muonium (Lebensdauer des Antimyons ca. $2.2 \mu\text{s}$) sind die Energieniveaus auch gut durch die Dirac-Energieniveaus E_D beschreibbar. Durch die kleinere Masse des Antimyons im Vergleich zum Proton (106 MeV bzw. 938 MeV) werden die Korrekturen aufgrund des 2-Körper-Problems E_{RM} aber größer.

⁴Precision Muonium Spectroscopy, Klaus P. Jungmann [8]

4.3.3 Myonischer Wasserstoff ($p + \mu^-$)

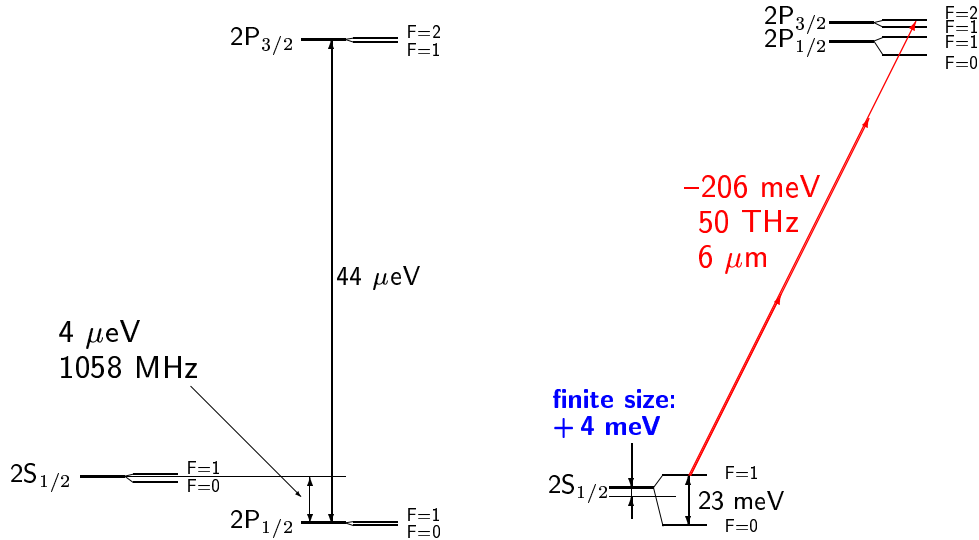


Figure 2.1: Schematic representation of the $n = 2$ energy levels in electronic hydrogen (left) and muonic hydrogen (right). Note the different energy scales for the two atoms. The indicated $4 \mu\text{eV}$ energy difference corresponds to the “classical” Lamb shift, dominated by the self-energy terms. The vacuum polarization in muonic hydrogen attracts the $2S$ state below the $2P$ state. The laser transition is indicated in red.

5

Bei myonischem Wasserstoff sind die Bindungsenergien viel größer, weil durch die im Vergleich zum Elektron sehr große Myonenmasse einen kleineren „Abstand“ verursacht. Hier weichen die Bohrschen Energieniveaus noch viel stärker von der Realität ab und die Dirac-Energieniveaus werden noch wichtiger. Allerdings hat die Ausdehnung des Protons eine größere Rolle, was den relative Einfluss des Lamb-Shifts um ca. 2 Größenordnungen erhöht ([2]). Die Korrekturen des 2-Körper-Problems können durch die Breit-Gleichung in 1. Ordnung Störungstheorie durch Abwandlung der Dirac-Gleichung genähert werden.

⁵Antognini, Aldo (2005): The Lamb Shift Experiment in Muonic Hydrogen. Dissertation, LMU [2]

5 Dirac-Quasiteilchen in Graphen in einem konstanten magnetischen Feld [5]

Im letzten Vortrag wurde die Beschreibung von Dirac-Quasiteilchen in Graphen gezeigt. Jetzt wird ein magnetisches Feld senkrecht zur Graphen-Ebene angenommen. In Landau-Eichung:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} -By \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (74)$$

Die Zyklotronfrequenz der Dirac-Fermionen ist dann

$$\omega_C = \sqrt{2} \frac{v_F}{l_B} \propto \sqrt{B} \quad (75)$$

mit der Fermi-Geschwindigkeit v_F und $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$. Durch minimale Kopplung wird die masselose Dirac-Gleichung zu

$$v_F \left(\vec{\sigma} \cdot (-i\hbar \vec{\nabla} + e\vec{A}) \right) \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (76)$$

mit der Fermi-Geschwindigkeit v_F anstatt der Lichtgeschwindigkeit c . oder

$$\psi(x, y) = e^{ikx} \phi(y) : \quad (77)$$

$$\implies v_F \begin{pmatrix} 0 & \hbar(\partial_y - k) + eBy \\ \hbar(-\partial_y - k) + eBy & 0 \end{pmatrix} \phi(y) = E\phi(y). \quad (78)$$

Mit den dimensionslosen Auf- und Absteigeoperatoren \mathcal{O}^\dagger und \mathcal{O} geschrieben:

$$\omega_C \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{O} \\ \mathcal{O}^\dagger & 0 \end{pmatrix} \phi(\xi) = E\phi(\xi) \quad (79)$$

$$\xi = \frac{y}{l_B} - l_B k \quad (80)$$

$$\mathcal{O} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\xi + \xi) \quad (81)$$

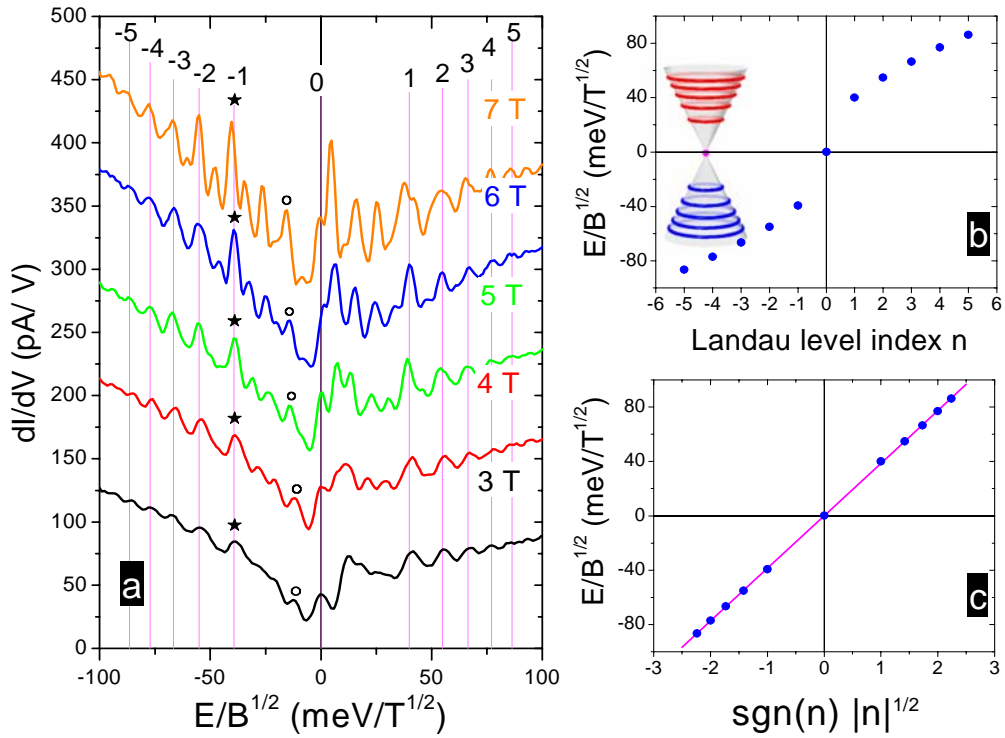
$$\mathcal{O}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\partial_\xi + \xi) \quad (82)$$

Die Lösung lässt sich durch die Eigenfunktionen ψ_N des eindimensionalen harmonischen Oszillators beschreiben:

$$\phi_{N,\pm}(\xi) = \begin{pmatrix} \psi_{N-1}(\xi) \\ \pm\psi_N(\xi) \end{pmatrix} \quad (83)$$

$$E_{\pm}(N) = \pm\hbar\omega_C\sqrt{N} \quad (84)$$

Diese Beziehung ist an den durch Rastertunnelspektroskopie bestimmten Energiewerten zu sehen, siehe [10]:



6

⁶[10]

Literatur

- [1] „A theory of electrons and protons“. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 126.801 (1930), S. 360–365. ISSN: 0950-1207. DOI: 10.1098/rspa.1930.0013. eprint: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/126/801/360.full.pdf>. URL: <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/126/801/360>.
- [2] Aldo Antognini. „The Lamb Shift Experiment in Muonic Hydrogen“. Dez. 2005. URL: <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bvb:19-50441>.
- [3] G. W. Bennett u. a. „Final report of the E821 muon anomalous magnetic moment measurement at BNL“. In: *Phys. Rev. D* 73 (7 Apr. 2006), S. 072003. DOI: 10.1103/PhysRevD.73.072003. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.072003>.
- [4] B.H. Bransden und C.J. Joachain. *Quantum Mechanics*. Prentice Hall, 2000. ISBN: 9780582356917. URL: <https://books.google.de/books?id=K9f3FOEGACgC>.
- [5] A. H. Castro Neto u. a. „The electronic properties of graphene“. In: *Rev. Mod. Phys.* 81 (1 Jan. 2009), S. 109–162. DOI: 10.1103/RevModPhys.81.109. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.109>.
- [6] W. Demtröder. *Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2016. ISBN: 9783662490938. URL: <https://books.google.de/books?id=-w4PjwEACAAJ>.
- [7] C. Itzykson und J.B. Zuber. *Quantum Field Theory*. Dover Books on Physics. Dover Publications, 2006. ISBN: 9780486445682.
- [8] Klaus P. Jungmann. „Precision Muonium Spectroscopy“. In: *Journal of the Physical Society of Japan* 85.9 (2016), S. 091004. DOI: 10.7566/JPSJ.85.091004. eprint: <https://doi.org/10.7566/JPSJ.85.091004>. URL: <https://doi.org/10.7566/JPSJ.85.091004>.
- [9] Carsten Kleppel. „Die Dirac-Gleichung“. In: *Von der Dirac-Gleichung zur Quantenelektrodynamik: Eine verständliche Einführung für Studierende der theoretischen Physik*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015. ISBN: 978-3-658-09483-6. DOI: 10.1007/978-3-658-09483-6_2. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-658-09483-6_2.

- [10] Guohong Li und Eva Y. Andrei. „Observation of Landau levels of Dirac fermions in graphite“. In: *Nature Physics* 3 (Juli 2007), 623 EP -. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nphys653>.
- [11] Peter J. Mohr, David B. Newell und Barry N. Taylor. „CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2014“. In: *Rev. Mod. Phys.* 88 (3 Sep. 2016), S. 035009. DOI: 10.1103/RevModPhys.88.035009. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.88.035009>.