

Quanten-Hall-Effekt

Beobachtungen Die Entdeckung und Formulierung des Quanten-Hall-Effekts kann auf Versuche zurückverfolgt werden, bei denen die Verbesserung der Feldeffekttransistoren (FET) als Ziel gesetzt wurde. Hierzu wurden Resistivitätsmessungen in der Probe durchgeführt; die Messergebnisse zeigen eine Struktur mit Plateaus in Abhängigkeit von Parametern, die die Elektronenanzahl bestimmen. Das Besondere, was von K. von Klitzing in seiner Publikation beschrieben wurde, ist, dass die Resistivitätswerte auf diesen Plateaus lediglich mithilfe von Naturkonstanten und einer ganzen Zahl ausgedrückt werden können.

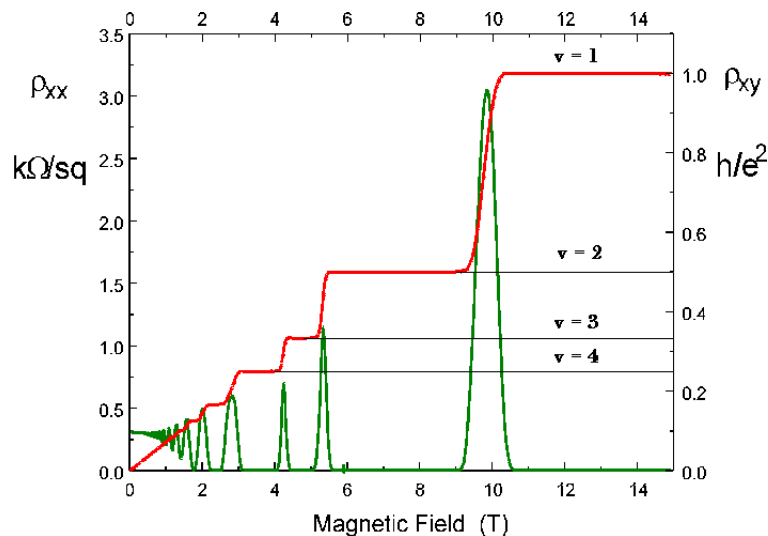


Abb. 1. Typische experimentelle Ergebnisse.[3]

Versuchsaufbau In dem von Klitzings Experiment wurden Si-MOSFETs ("Metal-oxide-semiconductor FETs) verwendet. Beim Anlegen von einer Gate-Spannung, entsteht zwischen dem Isolator (Oxid) und dem Halbleiter eine Elektrongasschicht, deren Dicke einige Zehnerangström beträgt. Damit kann


$$\vec{j} = -ne\vec{v} \quad (1)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2)$$

2

Form des σ -Konduktivitäts- bzw. ρ -Resistivitätstensors bestimmt werden:
($\rho = \sigma^{-1}$)

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{ne^2\tau} & \frac{B}{ne} \\ -\frac{B}{ne} & \frac{m}{ne^2\tau} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Daraus folgt das klassische Verhalten von ρ_{xx} und ρ_{xy} in Abhängigkeit von B , wie in Abb. 4.

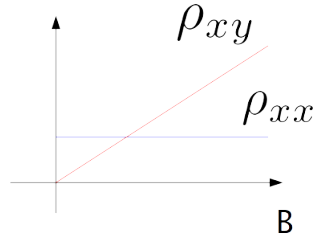


Abb. 4. ρ_{xx} und ρ_{xy} als Funktion von B .

Ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt Die Energien von Elektronen in einem B -Feld bzw. B - und E -Felder sind quantisiert. Um das für den Fall eines B_z -Feldes zu zeigen, findet man erst die Lagrange-Funktion und damit den kanonischen Impuls:

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - e \dot{\vec{x}} \vec{A} \quad (4)$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m \dot{\vec{x}} - e \vec{A} \quad (5)$$

Daraus folgt der Hamiltonian des Systems:

$$H = \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - L = \frac{1}{2m} (\vec{p} + e \vec{A})^2 \quad (6)$$

Mithilfe des mechanischen Impulses kann ein Ab- bzw. Aufsteigeoperator (a und a^\dagger) definiert werden:

$$\vec{\pi} = \vec{p} + e \vec{A} = m \dot{\vec{x}} \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} (\pi_x - i\pi_y) \quad (8)$$

Der Hamiltonian kann somit in einer Form geschrieben werden, die analog zum H_{HO} ist:

$$H = \frac{1}{2m} \vec{\pi}^2 = \hbar \omega_B (a^\dagger a + \frac{1}{2}) \quad (9)$$

Die Energiewerte folgen mit ω gleich der Zyklotronfrequenz:

$$E_n = \hbar \omega_B (n + \frac{1}{2}) = \frac{\hbar e B}{m} (n + \frac{1}{2}) \quad (10)$$

Diese Energieniveaus werden Landau-Niveaus genannt. Um die entsprechenden Zustände zu bestimmen, wird oft die Landau-Eichung verwendet:

$$\vec{A} = x B \hat{y} \quad (11)$$

Da sowohl \vec{B} als auch \vec{A} translationsinvariant in y-Richtung sind, wird der Ansatz $\psi_k = e^{iky} f_k(x)$ verwendet. Mit

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + (p_y + e B x)^2) \quad (12)$$

folgen die Lösungen der Schrödinger Gleichung; haben die Form des eindimensionalen harmonischen Oszillators; die Verschiebung der Wellenfunktion in x-Richtung ist durch k bestimmt.

$$\psi_{n,k}(x, y) \approx e^{iky} H_n(x + k l^2) e^{-\frac{(x + k l^2)^2}{2 l^2}} \quad (13)$$

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{e B}} \quad (14)$$

Wegen der k-Abhängigkeit der Wellenfunktionen, sind die Landau-Niveaus entartet. Um die Größe der Entartung zu bestimmen, wird die endliche Ausdehnung des Gases berücksichtigt - L_x und L_y . Es folgt für k:

$$k = \frac{2\pi}{L_y} \lambda, \lambda \in \mathbb{N} \quad (15)$$

Da die x-Position der Wellenfunktionslokalisierung von k abhängt:

$$k \in [\frac{-L_x}{l^2}, 0] \quad (16)$$

Es folgt für die Anzahl der Zustände pro Landau-Niveau:

$$\mathcal{N} = \frac{L_y}{2\pi} \int_{\frac{-L_x}{l^2}}^0 dk = \frac{L_x L_y}{2\pi l^2} = \frac{e A B}{2\pi \hbar} \quad (17)$$

Die anschauliche Erklärung folgt: falls sich die Fermi-Energie des Systems im Bereich zwischen zwei Landau-Niveaus befindet und die thermische

Energie niedrig ist ($k_B T \ll \hbar \omega_B$), gibt es keine besetzbaren Zustände für weitere Elektronen.

Wenn man zusätzlich im Hamiltonoperator den Term für das E-Feld berücksichtigt, kann derselbe Ansatz verwendet werden. Die Zustände haben die Form von (13) mit $x \rightarrow x + \frac{mE}{eB^2}$. Die Energien sind nicht mehr entartet und hängen linear von k ab:

$$E_{n,k} = \hbar \omega_Z \left(n + \frac{1}{2}\right) - eE \left(kl^2 + \frac{eE}{m\omega_B^2}\right) + \frac{m}{2} \frac{E^2}{B^2} \quad (18)$$

Bei der Erklärung dieses Phänomens werden mehrere Vereinfachungen gemacht. Als erstes werden die Elektronen als spinlos bzgl. den Energieniveaus betrachtet. Der Energieunterschied bei der Zeeman-Spaltung hängt von der Stärke des B-Feldes ab,

$$\Delta E = 2\mu_B B = \frac{e\hbar}{m} B \quad (19)$$

Wegen der großen Feldstärken, die verwendet werden, ist auch die Energiedifferenz groß und es finden keine Spin-Flips.

Randkanalmodell Die Energie-Quantisierung in dem System bietet einen intuitiven Anfangspunkt für die Effekte, die bei der Resistivität bzw. Konduktivität beobachtet wurden. Diese Intuition kann durch das sog. Randkanalmodell entwickelt werden.

Im klassischen Fall stoßen die Zyklotronorbits neben Ränder mit dem Rand - somit bewegen sich die Elektronen dort nur in einer (y bzw. $-y$) Richtung. In der quantenmechanischen Bild sind die Ränder durch ein Potential modelliert. Die Lokalisierung der durch k unterschiedenen Wellenfunktionen ist durch ein x -Wert gegeben. Das Potential kann um den Lokalisierungspunkt $X = -kl^2$ Taylorentwickelt werden:

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + (p_y + eBx)^2) + V(X) + \frac{\partial V}{\partial x} (x - X) + \dots \quad (20)$$

Die Terme quadratischer und höherer Ordnungen werden weggelassen und konstante Terme können vernachlässigt sein. Damit ist der Potentialterm linear in x und die erhaltenen Energien analog zu 18. Wie auch beim E-Feld, bewegen sich die Zustände mit einer Gruppengeschwindigkeit:

$$v_y = \frac{\partial \frac{E_{n,k}}{\hbar}}{\partial k} = -\frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (21)$$

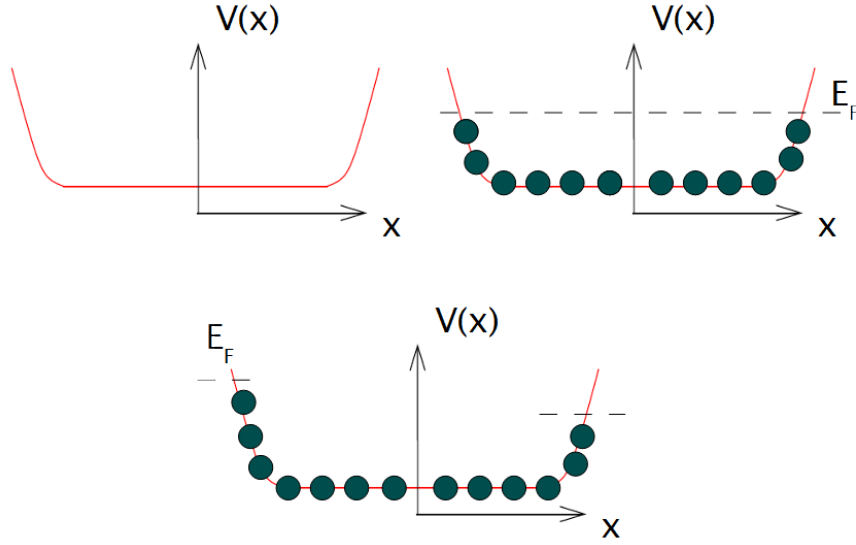


Abb. 5. Zustände im Potential im Zusammenhang mit der Fermi-Energie des Systems.

Diese Geschwindigkeit beschreibt den Effekt, der im klassischen Fall beobachtet wird. Als intuitive Beschreibung gilt auch, dass wegen des Zusammenhangs zwischen der x -Position und dem Impuls der Wellenfunktionen, die Zustände an den Rändern näher an der Fermi-Energie des Systems liegen und sich somit bewegen können.

Mithilfe der Einführung einer Potentialdifferenz $\Delta\mu$ zwischen den Rändern, kann der Strom in y -Richtung berechnet werden.

$$I_y = -e \int \frac{dk}{2\pi} v_y(k) = \frac{e}{2\pi l^2} \int dx \frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{e}{2\pi \hbar} \Delta\mu \quad (22)$$

Die transversale Konduktivität folgt aus $eV_{Hall} = \Delta\mu$:

$$\sigma_{xy} = \frac{I_y}{V_H} = \frac{e^2}{2\pi \hbar} \quad (23)$$

Dies entspricht der Konduktivität für ein Landau-Niveau und als Elemente der inversen Matrix bei $\rho_{xx} = 0$ folgen die beobachteten Resistivitätswerten. Auch das Verschwinden von ρ_{xx} folgt aus dem Modell: bei gefüllten Landau-Niveaus finden keine dissipative Effekte statt, da die Elektronen sich in entgegengesetzten Richtungen an verschiedenen Rändern der Probe bewegen.

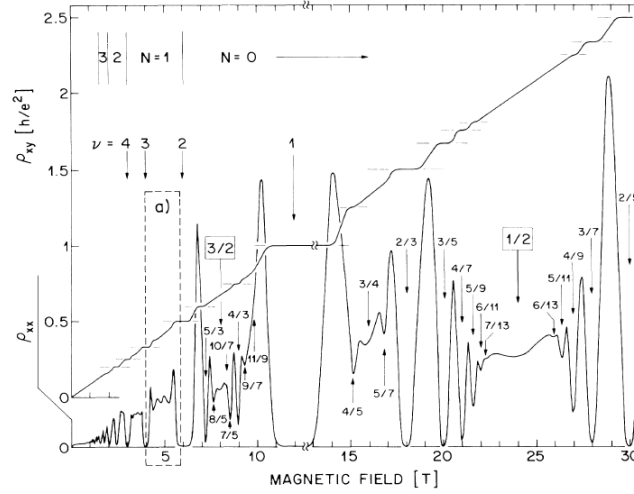


Abb. 6. Experimentellen Ergebnisse vom fraktionalen QHE.

Fraktionaler QHE Die obige Begründung gilt für den Fall von ganzzahligen Vielfachen der Konduktivität bzw. Resistivität. Es werden trotzdem Plateaus bei anderen, rationalen Koeffizienten beobachtet. Einige der Voraussetzungen dieses fraktionalen QHE sind noch tiefere Temperaturen und Proben, bei denen Verunreinigungen und andere Störungen eine geringere Rolle spielen.

Konsequenzen Da diese Resistivitätswerte nur mit Fundamentalkonstanten zusammenhängen, und der ganzzahlige Vorfaktor bis auf eine Genauigkeit von 10^{-9} bestimmt werden kann, erlaubte es die Einführung eines neuen Resistenzstandards. Es basiert sich auf dem Resistenzquantum gegeben durch die von-Klitzing-Konstante $RK = \frac{h}{e^2} = 25812,807557(18)\Omega$. Seit 1990 werden die daraus erhaltenen "konventioneller Werte" RK-90 für die Eichung von Widerständen verwendet. Derselbe Zusammenhang bietet eine alternative Möglichkeit zur Bestimmung des Wertes der Feinstrukturkonstante.

Literatur

- [1] K. v. Klitzing; G. Dorda; M. Pepper, *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Lett. **45** (1980), 494–497.
- [2] D. R. Yennie, *Integral quantum Hall effect for nonspecialists*, Rev. Mod. Phys. **59** (1987), 781–824.
- [3] Daniel R. Cooper et al., *Experimental Review of Graphene*, ISRN Condensed Matter Physics **2012** (2012), 1–56.

- [4] Dr. Narain Arora, *MOSFET Models for VLSI Circuit Simulation: Theory and Practice*, Springer-Verlag, Wien, 1993.
- [5] Benoît Douçot; Bertrand Duplantier; Vincent Pasquier; Vincent Rivasseau, *The Quantum Hall Effect: Poincaré Seminar 2004*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
- [6] D. C. Tsui; H. L. Stormer; A. C. Gossard, *Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit*, Phys. Rev. Lett. **48** (1982), 1559–1562.