

Laura Sproge
 Seminar Quantenmechanik WS 18/19
 bei Prof. Dr. Wolschin
 Quanten-Hall-Effekt

Beobachtungen Die Entdeckung und Formulierung des Quanten-Hall-Effekts kann auf Versuche zurückverfolgt werden, bei denen die Verbesserung der Feldeffekttransistoren (FET) als Ziel gesetzt wurde. Hierzu wurden Resistivitätsmessungen in der Probe durchgeführt; die Messergebnisse zeigen eine Struktur mit Plateaus in Abhängigkeit von Parametern, die die Elektronenanzahl bestimmen. Das Besondere, was von K. von Klitzing in seiner Publikation beschrieben wurde, ist, dass die Resistivitätswerte auf diesen Plateaus lediglich mithilfe von Naturkonstanten und einer ganzen Zahl ausgedrückt werden können.

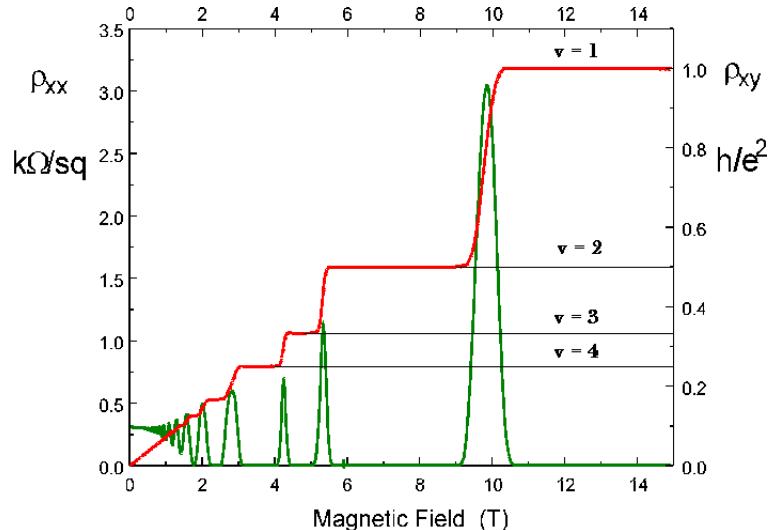


Abb. 1. Typische experimentelle Ergebnisse.[3]

Versuchsaufbau In dem von Klitzings Experiment wurden Si-MOSFETs ("Metal-oxide-semiconductorFETs) verwendet. Beim Anlegen von einer Gate-Spannung, entsteht zwischen dem Isolator (Oxid) und dem Halbleiter eine Elektrongasschicht, deren Dicke einige Zehnerangström beträgt. Damit kann

das Gas als zweidimensional angesehen werden. Wichtige Voraussetzungen für das Entstehen des Effekts sind niedrige Temperaturen ($< 4K$) und große B-Felder (s. Abb. 1).

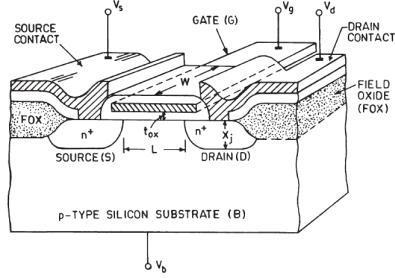


Abb. 2. Schematische Darstellung vom MOSFET.[4]

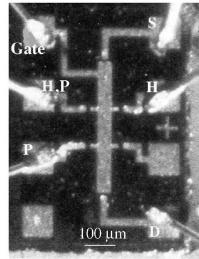


Abb. 3. Messung von xx- und xy-Komponenten des Resistivitätstensors. Für einen bestimmten Source-Drain Strom ist der Spannungsabfall zwischen P-P und H-H proportional zu den Resistivitäten ρ_{xx} und ρ_{xy} . [5]

Wiederholung: Klassischer Hall-Effekt Aufgrund der Lorentzkraft, bewegen sich die Elektronen, die auf der x-y-Ebene eingeschränkt sind, in einem konstantem B_z -Feld auf kreisförmigen Trajektorien. Die Kreisfrequenz $\omega_B = \frac{eB}{m}$ wird Zyklotronfrequenz genannt.

$$\vec{j} = -ne\vec{v} \quad (1)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2)$$

Falls in der Bewegungsgleichung weiterhin ein E_x -Feld und ein linearer Reibungsterm $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$ (wobei τ - die mittlere Stoßzeit) berücksichtigt wird, kann für das System im Gleichgewicht mithilfe von Gleichung 1 und 2 die

Form des σ -Konduktivitäts- bzw. ρ -Resistivitätstensors bestimmt werden:
 $(\rho = \sigma^{-1})$

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{ne^2\tau} & \frac{B}{ne} \\ -\frac{B}{ne} & \frac{m}{ne^2\tau} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Daraus folgt das klassische Verhalten von ρ_{xx} und ρ_{xy} in Abhängigkeit von B , wie in Abb. 4.

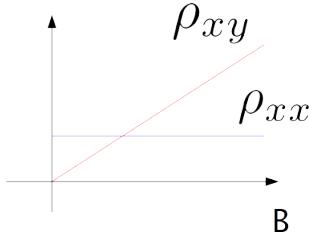


Abb. 4. ρ_{xx} und ρ_{xy} als Funktion von B .

Ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt Die Energien von Elektronen in einem B -Feld bzw. B - und E -Felder sind quantisiert. Um das für den Fall eines B_z -Feldes zu zeigen, findet man erst die Lagrange-Funktion und damit den kanonischen Impuls:

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 - e \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} \quad (4)$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m \dot{\vec{x}} - e \vec{A} \quad (5)$$

Daraus folgt der Hamiltonian des Systems:

$$H = \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - L = \frac{1}{2m} (\vec{p} + e \vec{A})^2 \quad (6)$$

Mithilfe des mechanischen Impulses kann ein Ab- bzw. Aufsteigeoperator (a und a^\dagger) definiert werden:

$$\vec{\pi} = \vec{p} + e \vec{A} = m \dot{\vec{x}} \quad (7)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} (\pi_x - i\pi_y) \quad (8)$$

Der Hamiltonian kann somit in einer Form geschrieben werden, die analog zum H_{HO} ist:

$$H = \frac{1}{2m} \vec{\pi}^2 = \hbar\omega_B (a^\dagger a + \frac{1}{2}) \quad (9)$$

Die Energiewerte folgen mit ω gleich der Zyklotronfrequenz:

$$E_n = \hbar\omega_B (n + \frac{1}{2}) = \frac{\hbar e B}{m} (n + \frac{1}{2}) \quad (10)$$

Diese Energieniveaus werden Landau-Niveaus genannt. Um die entsprechenden Zustände zu bestimmen, wird oft die Landau-Eichung verwendet:

$$\vec{A} = xB\hat{y} \quad (11)$$

Da sowohl \vec{B} als auch \vec{A} translationsinvariant in y -Richtung sind, wird der Ansatz $\psi_k = e^{iky} f_k(x)$ verwendet. Mit

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + (p_y + eBx)^2) \quad (12)$$

folgen die Lösungen der Schrödinger Gleichung; haben die Form des eindimensionalen harmonischen Oszillators; die Verschiebung der Wellenfunktion in x -Richtung ist durch k bestimmt.

$$\psi_{n,k}(x, y) \approx e^{iky} H_n(x + kl^2) e^{-\frac{(x+kl^2)^2}{2l^2}} \quad (13)$$

$$l = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}} \quad (14)$$

Wegen der k -Abhängigkeit der Wellenfunktionen, sind die Landau-Niveaus entartet. Um die Größe der Entartung zu bestimmen, wird die endliche Ausdehnung des Gases berücksichtigt - L_x und L_y . Es folgt für k :

$$k = \frac{2\pi}{L_y} \lambda, \lambda \in \mathbb{N} \quad (15)$$

Da die x -Position der Wellenfunktionslokalisierung von k abhängt:

$$k \in [-\frac{L_x}{l^2}, 0] \quad (16)$$

Es folgt für die Anzahl der Zustände pro Landau-Niveau:

$$\mathcal{N} = \frac{L_y}{2\pi} \int_{-\frac{L_x}{l^2}}^0 dk = \frac{L_x L_y}{2\pi l^2} = \frac{eAB}{2\pi\hbar} \quad (17)$$

Die anschauliche Erklärung folgt: falls sich die Fermi-Energie des Systems im Bereich zwischen zwei Landau-Niveaus befindet und die thermische

Energie niedrig ist ($k_B T \ll \hbar\omega_B$), gibt es keine besetzbaren Zustände für weitere Elektronen.

Wenn man zusätzlich im Hamiltonoperator den Term für das E-Feld berücksichtigt, kann derselbe Ansatz verwendet werden. Die Zustände haben die Form von (13) mit $x \rightarrow x + \frac{mE}{eB^2}$. Die Energien sind nicht mehr entartet und hängen linear von k ab:

$$E_{n,k} = \hbar\omega_Z(n + \frac{1}{2}) - eE(kl^2 + \frac{eE}{m\omega_B^2}) + \frac{m}{2} \frac{E^2}{B^2} \quad (18)$$

Bei der Erklärung dieses Phänomens werden mehrere Vereinfachungen gemacht. Als erstes werden die Elektronen als spinlos bzgl. den Energieniveaus betrachtet. Der Energieunterschied bei der Zeeman-Spaltung hängt von der Stärke des B-Feldes ab,

$$\Delta E = 2\mu_B B = \frac{e\hbar}{m} B \quad (19)$$

Wegen der großen Feldstärken, die verwendet werden, ist auch die Energiedifferenz groß und es finden keine Spin-Flips.

Randkanalmodell Die Energie-Quantisierung in dem System bietet einen intuitiven Anfangspunkt für die Effekte, die bei der Resistivität bzw. Konduktivität beobachtet wurden. Diese Intuition kann durch das sog. Randkanalmodell entwickelt werden.

Im klassischen Fall stoßen die Zyklotronorbits neben Rändern mit dem Rand - somit bewegen sich die Elektronen dort nur in einer (y bzw. $-y$) Richtung. In der quantenmechanischem Bild sind die Ränder durch ein Potential modelliert. Die Lokalisierung der durch k unterschiedenen Wellenfunktionen ist durch ein x -Wert gegeben. Das Potential kann um den Lokalisierungspunkt $X = -kl^2$ taylorentwickelt werden:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + (p_y + eBx)^2) + V(X) + \frac{\partial V}{\partial x}(x - X) + \dots \quad (20)$$

Die Terme quadratischer und höherer Ordnungen werden weggelassen und konstante Terme können vernachlässigt sein. Damit ist der Potentialterm linear in x und die erhaltenen Energien analog zu 18. Wie auch beim E-Feld, bewegen sich die Zustände mit einer Gruppengeschwindigkeit:

$$v_y = \frac{\partial \frac{E_{n,k}}{\hbar}}{\partial k} = -\frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (21)$$

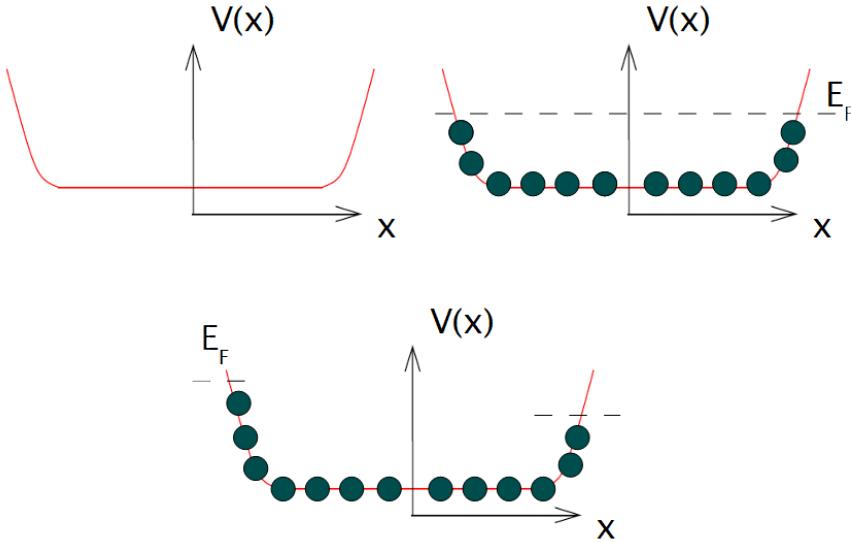


Abb. 5. Zustände im Potential im Zusammenhang mit der Fermi-Energie des Systems.

Diese Geschwindigkeit beschreibt den Effekt, der im klassischen Fall beobachtet wird. Als intuitive Beschreibung gilt auch, dass wegen des Zusammenhangs zwischen der x-Position und dem Impuls der Wellenfunktionen, die Zustände an den Rändern näher an der Fermi-Energie des Systems liegen und sich somit bewegen können.

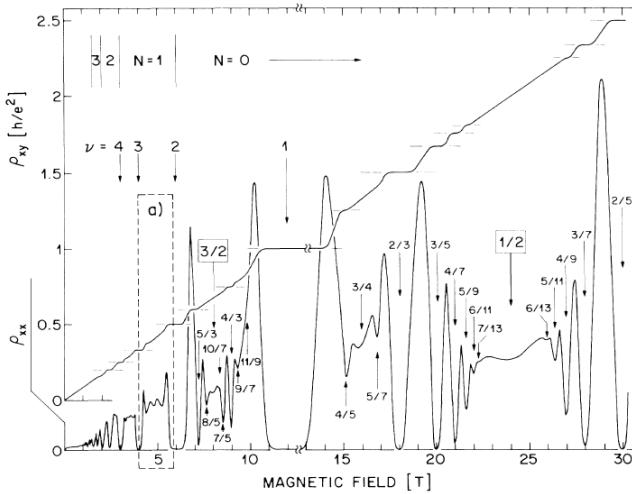
Mithilfe der Einführung einer Potentialdifferenz $\Delta\mu$ zwischen den Rändern, kann der Strom in y-Richtung berechnet werden.

$$I_y = -e \int \frac{dk}{2\pi} v_y(k) = \frac{e}{2\pi l^2} \int dx \frac{1}{eB} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{e}{2\pi \hbar} \Delta \mu \quad (22)$$

Die transversale Konduktivität folgt aus $eV_{Hall} = \Delta\mu$:

$$\sigma_{xy} = \frac{I_y}{V_H} = \frac{e^2}{2\pi \hbar} \quad (23)$$

Dies entspricht der Konduktivität für ein Landau-Niveau und als Elemente der inversen Matrix bei $\rho_{xx} = 0$ folgen die beobachteten Resistivitätswerten. Auch das Verschwinden von ρ_{xx} folgt aus dem Modell: bei gefüllten Landau-Niveaus finden keine dissipative Effekte statt, da die Elektronen sich in entgegengesetzten Richtungen an verschiedenen Rändern der Probe bewegen.



- [4] Dr. Narain Arora, *MOSFET Models for VLSI Circuit Simulation: Theory and Practice*, Springer-Verlag, Wien, 1993.
- [5] Benoît Douçot; Bertrand Duplantier; Vincent Pasquier; Vincent Rivasseau, *The Quantum Hall Effect: Poincaré Seminar 2004*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
- [6] D. C. Tsui; H. L. Stormer; A. C. Gossard, *Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit*, Phys. Rev. Lett. **48** (1982), 1559–1562.