

# Quanten-Hall-Effekt

Handout zum Seminarvortrag von Alexander Stoll im Rahmen des Seminars "Probleme der Quantenmechanik" bei Prof. G. Wolschin.

## 1 Einleitung

Klaus von Klitzing entdeckte am 5. Februar 1980 den Quanten-Hall-Effekt. Er führte die Messungen in einem Hochmagnetfeldlaboratorium in Grenoble an MOSFET's bei Temperaturen von 1.5 K und hohen Feldern von bis zu 18 T durch. Seine Messungen zeigten Abweichungen zu der klassischen Erwartung und wiesen plateauartige Strukturen im Hallwiderstand und Oszillationen im Längswiderstand auf (siehe fig. 1). Für diese Entdeckung wurde K. v. Klitzing mit dem Nobelpreis im Jahre 1985 geehrt. Das Folgende erklärt den Widerspruch zum Klassischen, sowie die zugehörige Erklärung des Quanten-Hall-Effekts im Rahmen der Quantenmechanik.

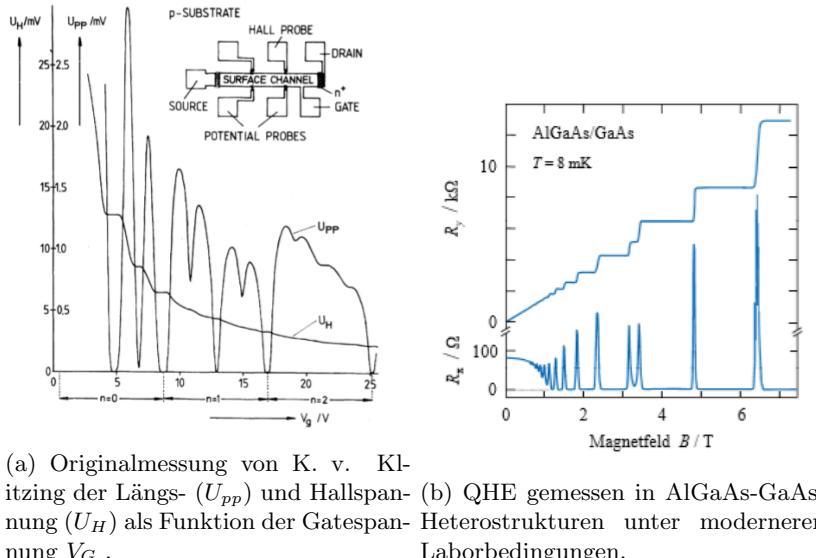


Figure 1: QHE-Messungen

## 2 Klassischer Quanten-Hall-Effekt

Edwin Herbert Hall entdeckte 1879 den nach ihm benannten Hall-Effekt. Er untersuchte hierbei den Einfluss eines magnetischen Feldes auf einen stromdurchflossenen Leiter. Der Aufbau ist hierbei wie folgt: Es wird ein konstantes Magnetfeld  $\vec{B}$  erzeugt, das in z-Richtung weist. Währenddessen, fließe ein konstanter Strom in x-Richtung in einem Leiterplättchen. Da wir es hier mit bewegter Ladung im Magnetfeld zu tun haben, wirkt die Lorentzkraft senkrecht zur Bewegung der Ladungsträger und senkrecht zum B-Feld, also in y-Richtung. Dadurch wird ein Potentialunterschied zwischen den beiden Enden in y-Richtung erzeugt, was dann schließlich als sogenannte Hall-Spannung registriert wird.

### 2.1 Drude-Theorie/Modell

Für die Bewegungsgleichungen der Ladungsträger, gehen wir von der Drude-Theorie aus. In diesem Modell betrachtet man ein elektrisches Leiter als Ionenkristall, in dem sich die Elektronen frei bewegen können, ein Elektronengas bilden und somit verantwortlich für die Stromleitung sind. Wird nun eine elektrisches Feld  $\vec{E}$  angelegt, erfahren die Elektronen die Kraft  $\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E}$  und werden dadurch diskontinuierlich beschleunigt, da das ohmsche Gesetz gelten muss. Nach einer gewissen Zeit, stellt sich ein Gleichgewicht ein, in dem die mittlere Geschwindigkeit des Elektrons, die sogenannte Driftgeschwindigkeit, proportional zur Feldstärke ist. Innerhalb des Modells erklärt sich dies durch das Zusammenstoßen von Elektron mit Gitterion, was ein Abbremsen bewirkt. Die mittlere Stoßzeit  $\tau$ , auch Relaxationszeit genannt, zwischen zwei Kollisionen beschreibt diesen Vorgang. Die Bewegungsgleichung lautet:

$$\vec{F}_{ges} = \vec{F}_{el} - \vec{F}_{Kollision} \iff m \cdot \dot{\vec{v}} = -e \cdot \vec{E} - \frac{m}{\tau} \cdot \vec{v}_D \quad (1)$$

Geht man nun zurück zum Hall-Effekt, so muss man zusätzlich noch durch das Magnetfeld  $B$  hervorgerufene Lorentzkraft berücksichtigen:

$$m \cdot \dot{\vec{v}} + \frac{m}{\tau} \cdot \vec{v}_D = -e(\vec{E} + \vec{v}_D \times \vec{B}) \quad (2)$$

Im stationären Zustand, ist die Driftgeschwindigkeit gegeben durch

$$\vec{v}_D = -e \frac{\tau}{m} (\vec{E} + \vec{v}_D \times \vec{B}) \quad (3)$$

Im Folgenden nehmen wir weiterhin an, dass das  $\vec{B}$ -Feld in  $z$ -Richtung weist und erhalten für die Stromdichte nach dem ohmschen Gesetz und Umstellung nach den Komponenten von  $v_D$  in (3) :

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} = \frac{-\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau & 0 \\ \omega_c \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \omega_c^2 \tau^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (4)$$

wobei  $\sigma_0 = ne^2 \frac{\tau}{m}$  die Leitfähigkeit ohne Magnetfeld beschreibt und  $\omega_c = \frac{eB}{m}$  die Zyklotronfrequenz.

Nun werden wir auch für die weitere Diskussion einen flachen Leiter mit rechteckigem Querschnitt betrachten, wodurch sich der Strom und das elektrische Feld in  $z$ -Richtung vernachlässigen lässt. Damit wird (4) aufgelöst nach den Elektrischen Feldern zu

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} \\ -\rho_{xy} & \rho_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} \quad (5)$$

wobei die spezifischen Widerstandskomponenten gegeben sind durch

$$\rho_{xx} = \frac{B}{ne} \frac{1}{\omega_c \tau} = \frac{m}{ne^2 \tau} = K_H \frac{m}{e \tau}, \quad (6)$$

$$\rho_{xy} = \frac{B}{ne} = K_H B. \quad (7)$$

mit  $K_H = \frac{1}{ne}$  der Hall-Konstanten. Plottet man diese beiden Widerstandswerte in Abhängigkeit des  $B$ -Feldes, so erhalten wir nach klassischer Erwartung die Struktur in fig. 2. Dies erklärt warum der Verlauf, den Klitzing damals gemessen hat, äußerst merkwürdig erschien (siehe fig. 1).

### 3 Zwei-dimensionales Elektronengas (2DEG)

Um nun den QHE zu realisieren, braucht man neben tiefen Temperaturen und hohen Magnetfeldern ein sogenanntes zweidimensionales Elektronen Gas (2DEG). Man kann diese in metal-oxide-semi-conductor-field-effect-transistors (MOSFET's) beobachten oder auch (und üblicher) in diversen Halbleiterheterostrukturen (z.B n-dotiertes Al-GaAs und GaAs) erzeugen. Das 2DEG sind hierbei freie Elektronen, die in einer Richtung eingeschränkt sind in ihrer Bewegung. Man kann dies durch ein schmalen Potentialtopf näherungsweise erreichen, was zur Folge hat, dass die Energiewerte in dieser Richtung quantisiert sind. Ist nun dabei nur das unterste Energieniveau besetzt, so sind die Elektronen frei in der zur eingeschränkten Richtung senkrechten Fläche.

Hierbei dient als Grundmaterial ein p-dotiertes Siliziumkristall (Substrat oder auch „Bulk“), in welches zwei n-dotierte Gebiete mit hoher Leitfähigkeit eingelassen sind, die wiederum den Source- und Drain-Anschluss bilden. Man hat also mit dem Substrat dazwischen eine npn-Struktur, die kein Stromfluss zulässt (siehe auch npn-Transistor). Im Zwischenraum wird eine dünne Isolierschicht (Dielektrikum) aufgebracht. Dieses bewirkt eine Abtrennung der Gate-Elektrode von dem darunterliegenden Substrat. Gate, Isolator und Bulk erzeugen dann ein Kondensator. Wird eine Spannung zwischen Gate und Bulk angelegt, so wird durch das damit erzeugte elektrische Feld Elektronen an die Grenzschicht gebracht, auch als n-Kanal bezeichnet, falls die Verdrängung der Majoritätsladungsträger so groß ist, sodass keine Rekombination mehr möglich ist. Die Beziehung zwischen Anzahl der negativen Ladungsträger und der Gate-Spannung ist hierbei proportional. Bei nun richtig eingestellter Gate-Spannung  $U_g$  ist es möglich, den n-Kanal in ein 2DEG zu bilden.

### 4 Integraler Quanten-Hall-Effekt

Legt man am MOSFET nun ein Magnetfeld so an, dass dieser orthogonal zum n-Kanal weist, so ist es möglich eine Hallspannung an den Elektroden, die senkrecht zum B-Feld sind, zu messen. Wie schon bereits beschrieben, ist

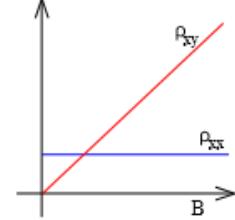
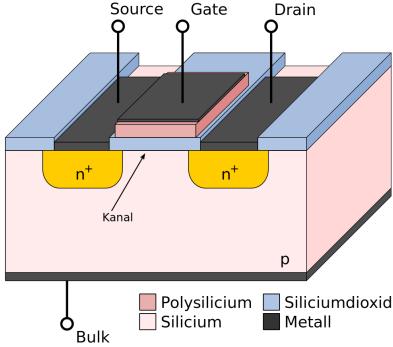
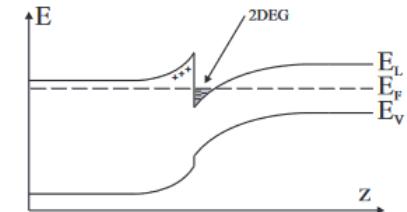
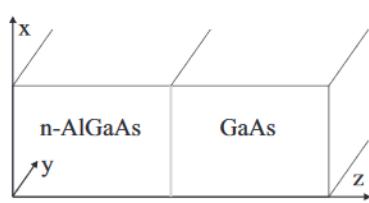


Figure 2: Klassische Erwartung



(a) Schematischer Aufbau eines n-Kanal MOSFETs. Autor: Markus A. (b) Darstellung des Schichtaufbaus der Heterostruktur.



(c) Bandstruktur des Schichtsystems. Durch die Bandverbiegung entsteht ein Potentialtopf, der Elektronen in der Grenzschicht einsperrt.

Figure 3: a) MOSFET und b)/c) n-dotierte AlGaAs/GaAs-Heterostruktur

$n \sim U_g$ , woraus folgen müsste, dass die Hall-Spannung umgekehrt proportional zur Gate-Spannung ist. Klaus von Kitzling beobachtete dies jedoch nicht (siehe fig.1). Während bei niedrigen Feldern der Längs- und Quer-Widerstand der klassisch vorhergesagten Beziehung folgen, so sieht man bei höheren Feldstärken starke Abweichungen. Man beobachtet mehrere Plateau-Strukturen, deren Widerstandswerte unabhängig von Geometrie der Probe und des B-Feld-Wertes auftreten:

$$R_H = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2}, \quad \nu \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

Es fällt außerdem auf, dass die Minima, bei denen der Längswiderstand verschwindet, genau bei den Werten des magnetischen Feldes liegt, bei denen auch die Plateaus auftreten (siehe fig.1).

#### 4.1 Landau-Niveaus

Um nun diesen Effekt quantenmechanisch zu beschreiben, eignet es sich die Schrödinger-Gleichung für ein Elektron des 2DEG in der x-y-Ebene unter Einfluss eines äußeren Magnetfeldes zu betrachten. Wir werden hierbei für die weitere Diskussion den Spin der Elektronen vernachlässigen, was in Näherung für die meisten Quanten-Hall-Systeme gut möglich ist.

Die Schrödinger-Gleichung ist im Ortsraum gegeben durch:

$$\left( \frac{(i\hbar\vec{\nabla} + e\vec{A}(x, y))^2}{2m} + U(x, y) \right) \psi(x, y) = E\psi(x, y) \quad (9)$$

Wobei  $\vec{A}(x, y)$  das Vektorpotential zum  $\vec{B}$ -Feld ist (also  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ ) und  $U(y)$  das Randpotential, das die Elektronenbewegung einschränkt, beschreibt. Mit Hilfe der Landau-Eichung  $\vec{A} = (-By, 0, 0)$  zeigt das  $\vec{B}$ -Feld in z-Richtung. Hierbei sei erwähnt, dass dies eine Wahl ist und  $\vec{B}$  invariant unter Translations- und Rotationssymmetrie ist in der x-y-Ebene, wobei die Wahl von  $\vec{A}$  es nicht ist, denn sie bricht sowohl Rotationssymmetrie als auch Translationsymmetrie in y-Richtung. Unter Vernachlässigung des Randpotentials  $U(x, y)$ , sowie dem Separationsansatz nach Landau  $\psi(x, y) = \phi(x)\chi(y) = \frac{1}{\sqrt{L}}\exp(ikx)\chi(y)$  erhalten wir als Lösung für  $\chi(y)$  die Eigenfunktionen eines verschobenen harmonischen Oszillators:

$$\chi_{n,k}(y) = \exp\left(-\frac{(a + a_k)^2}{2}\right) H_n(a + a_k) \quad (10)$$

mit  $a = \sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}y$ ,  $a_k = \sqrt{\frac{m\omega_c}{\hbar}}y_k$  und  $H_n$  dem n-ten Hermiteschen Polynom. Der Separationsansatz in der verwendeten Form ist möglich, da wir eine manifeste Translationsinvarianz in x-Richtung haben, weshalb wir nach Energie-Eigenzustände suchen können, die auch Eigenzustände zum Impulsoperator  $p_x$  sind. Das sind aber gerade ebene Wellen in x-Richtung, was auch die Form von  $\phi(x)$  erklärt. Die Energieeigenwerte des harmonischen Oszillators sind diskret und unabhängig von  $k$ . Die Energieeigenwerte unseres Problems sind demnach gegeben durch:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_c, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (11)$$

Man bezeichnet diese diskreten Eigenwerte auch als Landau-Niveaus. Das Magnetfeld bewirkt also, dass die Subbänder des 2DEG aufgespalten werden und es entstehen diskretisierte Energiewerte. Unsere Zustände im  $\vec{k}$ -Raum werden nun

auf Kreislinien gezwungen und unsere zuvor kontinuierliche Zustandsdichte zerfällt nun in eine Reihe von äquidistanten  $\delta$ -Peaks im Abstand von  $\hbar\omega_c$ . Klassisch lässt sich dies insofern veranschaulichen, dass sich die Elektronen auf Kreisbahnen mit Kreisfrequenz  $\omega_c$  bewegen, was sich wiederum durch die Überlagerung zweier senkrecht zueinander stehenden harmonischen Schwingungen beschreiben lässt.

Das System ist des Weiteren entartet, denn obwohl die Wellenfunktion  $\psi$  von  $\mathbf{k}$  abhängt, tun das die Energieniveaus nicht.

Als Nächstes sind wir am Entartungsgrad der Landau-Niveaus interessiert, welche uns Auskunft über die Anzahl der Elektronenzustände pro Niveau angibt. Wir wissen, dass  $y_k$  durch die Länge  $L_x$  und Weite  $L_y$  beschränkt ist. Zusätzlich nehmen wir periodische Randbedingungen an

$$k_x = n_x \frac{2\pi}{L_x}, \quad n_x \in \mathbb{Z} \quad (12)$$

Damit und dem Abstand  $\Delta y_k = \frac{\hbar}{eB} \Delta k_x$  zwischen den Zentrumskoordinaten erhalten wir folgende Anzahl an Zuständen in der Probe

$$N = \frac{L_y}{\Delta y_k} = L_x L_y \frac{eB}{\hbar} \quad (13)$$

Wird das nun auf die Einheitsfläche normiert, erhalten wir den Entartungsgrad  $N_L$

$$N_L = \frac{eB}{\hbar} \quad (14)$$

Dieser gibt an wie viel Zustände man auf einem Kreis mit Radius  $|\vec{k}|$  im  $\vec{k}$ -Raum vorfindet. Eine weitere interessante Größe ist der Füllfaktor  $\nu$ , der die Anzahl der gefüllten Landau-Niveaus (also Kreise im  $\vec{k}$ -Raum) angibt:

$$\nu = \frac{n_e}{N_L} = \frac{n_e h}{eB} \quad (15)$$

wobei  $n_e$  die Elektronendichte ist. Setzt man das in die klassisch berechnete Hallresistivität, so erhalten wir folgendes:

$$\rho_{xy} = \frac{B}{\nu N_L e} = \frac{Bh}{\nu e^2 B} = \frac{1}{\nu} \frac{h}{e^2} \quad (16)$$

Falls  $\nu$  ganzzahlig sein soll, so muss demnach  $B$  äußerst fein geregelt sein, jedoch wird das nicht im QHE beobachtet, denn die Plateaus erstrecken sich über eine gewisse Breite. Dies lässt sich durch die Fermi-Energie erklären.

Mit der Fermienergie  $E_F$  bezeichnet man für  $T = 0K$  die Energiedifferenz zwischen Grundzustand zum höchstbesetzten Zustand. Geht man nun von einem freien Elektronengas aus, so werden die Zustände im Impulsraum energetisch nacheinander aufgefüllt, also beginnend mit  $\vec{k} = 0$  bis zu  $\vec{k} = \vec{k}_F$ , dem Fermiwellenvektor. Hierbei sind nun alle Zustände mit  $E < E_F$  besetzt und liegen im Impulsraum innerhalb der Fermi-Kugel. Die Zustände die nun außerhalb dieser Kugel sitzen, sind dabei unbesetzt. Die höchst besetzten Zustände sind somit diejenigen Zustände, die auf der Oberfläche der Fermi-Kugel liegen. Wir wissen zusätzlich, dass die Landau-Niveaus der Elektronen im Magnetfeld energetisch getrennt sind mit dem Abstand  $\Delta E = \hbar\omega_c = \frac{heB}{m}$ . Sei nun im Folgenden  $E_n$  die Energie des höchstbesetzten Landau-Niveaus und man nehme an, dass  $E_n < E_F < E_{n+1}$ . Zusätzlich gilt für niedrige Temperaturen  $|E_n + \hbar\omega_c - E_F| \gg k_B T$ , wodurch im Phasenraum im Umkreis  $\delta E \sim k_B T$  keine freien Zustände vorhanden sind. Auf Grund der geringen kinetischen Energie ist es den Elektronen auch nicht möglich die Energiedifferenz zwischen Fermi-Energie und unbesetztem Landau-Niveau zu überwinden. In solch einem beschriebenen Fall, ist der Füllfaktor ganzzahlig, da das höchstbesetzte Landau Niveau  $n$  voll besetzt ist, aber das Niveau  $n+1$  nicht. Diese Erklärung unterliegt jedoch einem Denkfehler und zwar der Tatsache, dass  $E_F$  gerade durch  $E_n$  definiert ist. Dies wird unter 4.3 weiter erläutert.

Noch zu erwähnen ist, dass wenn man es mit kleineren Magnetfeldern zu tun ( $< 6$  Tesla) hat, so ist die Aufspaltung der Spinniveaus  $g\mu_B B$  (mit  $g$  dem Landé-Faktor) vernachlässigbar im Vergleich zur Aufspaltung der Landau-Niveaus. Man sagt hier auch, dass die Landau-Niveaus spin-entartet sind und damit jeder Elektronenzustand aus zwei Elektronen besteht (spin-up und spin-down).

## 4.2 Randkanalmodell

Der elektrische Transport geschieht nur mit Elektronen nahe der Fermi-Kante (siehe Sommerfeld-Theorie). Ein logischer Schluss wäre demnach zu behaupten, dass der Widerstand sein kleinsten Wert erreicht, wenn die Fermi-Energie auf eines der Landau-Niveaus fällt, denn in den voll besetzten Landau-Niveaus kann keine Elektronenstreuung auftreten, die mittlere Stoßzeit  $\tau$  ist daher unendlich. Somit nehmen sowohl  $\sigma_{xx}$  als auch  $\rho_{xx}$  den Wert null an. Jedoch ist das nicht der Fall im QHE (siehe auch fig. 1).

Um das zu erklären, ist es von Nöten die Abmessungen der Probe zu berücksichtigen, was das Potential  $U(y)$  beschreibt, das wir bisher vernachlässigt haben. In fig. 4 sieht man das Potential für einen rechteckigen Leiter, von dem wir im Folgenden weiterhin ausgehen. Zurück zur Gleichung (12) ist es möglich eine Lösung mit der Störungstheorie zu finden. Hiermit ergibt sich bis zur 1. Ordnung:

$$E_{n,k} \approx (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c + \langle n, k | U(y) | n, k \rangle \quad (17)$$

Mit den Zuständen  $|n, k\rangle$  werden die Wellenfunktionen um die Zentrumskoordinaten  $y_k$  gemeint. Nehmen wir zusätzlich an, dass das Potential entlang der Ausdehnung der Zustände näherungsweise konstant ist, so erhalten wir

$$E_{n,k} \approx (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c + U(y_k) \quad \text{mit} \quad y_k = \frac{\hbar k}{eB} \quad (18)$$

Das hat nun zur Folge, dass die Landau-Niveaus an den Rändern nach oben gebogen werden, wobei an diesen Rändern kontinuierliche Zustände entstehen, die die Fermi-Energie kreuzen. Die Gruppengeschwindigkeit der Elektronen mit dieser Energie ist dann

$$v(n, k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(n, k)}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial U(y_k)}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial U(y_k)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial k} = \frac{1}{eB} \frac{\partial U(y)}{\partial y} \quad (19)$$

Auf Grund des konstanten Potentials im Inneren ist leicht zu sehen, dass kein elektrischer Transport dort stattfindet, da die partielle Ableitung und damit die Geschwindigkeit verschwindet. Wir haben als nur am Rand eine Gruppengeschwindigkeit ungleich 0, also haben wir nur ein Strom am Rand. Hierbei fließt der Strom an beiden Rändern in entgegengesetzten Richtungen, da man ein Vorzeichenwechsel in der Ableitung hat. Ist nun die Fermi-Energie innerhalb zweier Landau-Niveaus, haben wir zwei Stromkanäle an den Rändern, die räumlich getrennt sind. Da wir im Inneren keine erlaubten Zuständen haben, ist es demnach auch nicht möglich ein Elektron von der einen Seite auf die andere zu streuen. Auch der Überlapp zweier Wellenfunktion ist auf Grund der geringen räumlichen Ausdehnung in guter Näherung 0. Man hat also effektiv die Rückstreuung unterdrückt, was zur Folge hat, dass der Widerstand auf Null herabsinkt.

Weiterhin kann man auch den Stromfluss in x-Richtung nun berechnen, welcher gegeben ist durch die Integration über alle besetzte Zustände innerhalb des Leitungsbandes:

$$I_x = -e \int \frac{dk}{2\pi} v(k) = \frac{e}{2\pi} \frac{eB}{\hbar} \int dy \frac{1}{eB} \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{e}{h} \Delta\mu \quad (20)$$

wobei  $\Delta\mu$  die Potentialdifferenz zwischen beiden Enden der Probe bezeichnet. Nutzt man nun auch die Hallspannung  $U_H$  aus mit  $eU_H = \Delta\mu$ , so erhalten wir folgenden Wert für die Hallresistivität:

$$\rho_{xy} = \frac{U_H}{I_x} = \frac{h}{e^2} \quad (21)$$

Dies entspricht der Hallresistivität eines voll besetzten Landau-Niveaus.

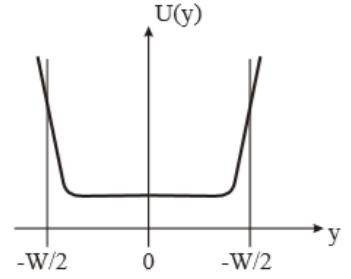


Figure 4: Randpotential eines rechteckigen Leiters.

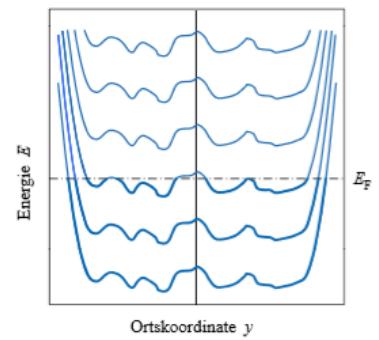
### 4.3 Störpotentiale und lokalisierte Zustände

Im Allgemeinfall, können wir nicht davon ausgehen, dass die Fermi-Energie zwischen zwei Landau-Niveaus liegt. Erfährt ein System ein Magnetfeld, so kommt es zur Ausbildung von Landau-Niveaus. Werden zusätzlich tiefe Temperaturen erzeugt, so sind die Landau-Niveaus bis zur Fermi-Energie vollständig besetzt und die Fermi-Energie durch das höchste Landau-Niveau definiert. Eine Erhöhung des Magnetfelds hierbei, bewirkt nicht nur eine Vergrößerung der Abstände zwischen den Niveaus, sowie deren Entartungsgrad, sondern auch eine Erhöhung der Landau-Niveaus selbst und demnach auch der Fermi-Energie. Jedoch ist auf Grund des gleichzeitig erhöhten Entartungsgrades, mehr "Platz" in den unteren Niveaus, was zur Entleerung des obersten Niveaus führt. Ist das oberste Niveau vollständig entleert, so sinkt die Fermi-Energie abrupt in das nächst tiefere.

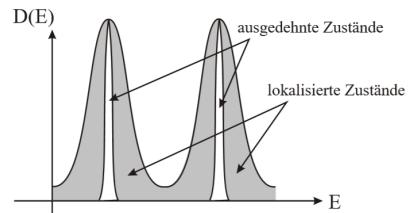
Unser Erklärungsmodell bedarf jedoch der Tatsache, dass die Fermi-Energie zwischen den Landau-Niveaus liegen muss. Die durch das Potential verursachten Randzustände sind jedoch im Vergleich zu den Landau-Niveaus in ihrer Anzahl zu klein, als dass sie die Fermi-Energie dort stabilisieren könnten.

Nichtsdestotrotz, besitzen reale Proben zusätzliche Störpotentiale, die auf Grund von Verunreinigungen und/oder Defekte des Materials entstanden sind. Dadurch kommt es zu Fluktuationen in unserer Energiedispersion. Das hat zur Folge, dass unsere bisherigen  $\delta$ -förmigen Peaks der Landau-Niveaus sich energetisch verbreitern. Durch diese nun delokalisierten Zustände können nun auch im Inneren der Probe Zustände die zwischen den Landau-Niveaus leben, vorkommen, die Fermi-Energie stabilisieren und dadurch als weitere Leitungskanäle fungieren. Diese Kanäle sind jedoch in sich geschlossen und dazu in der Lage Elektronen von bestimmten räumlich getrennten Regionen der Probe einzufangen. Energetisch betrachtet, weichen die Zustände dieser Kanäle weit von den Niveaus ab, sodass man sie effektiv als lokalisiert sehen kann. Auf Grund der räumlichen Lokalisierung tragen sie nicht zum Ladungstransport bei.

Die lokalisierten Zustände haben trotz allem einen Einfluss auf den Transport. Anhand von fig.7 ist zu sehen, wie sich



(a) Der Einfluss von Defekten auf die Landau-Niveaus



(b) Verbreiterte  $\delta$ -Peaks unter Störpotentialen.

Figure 5: Der Einfluss von Störpotentialen

Figure 6: Das Randkanalmodell unter Störpotentialen und verschiedenen B-Feldern.

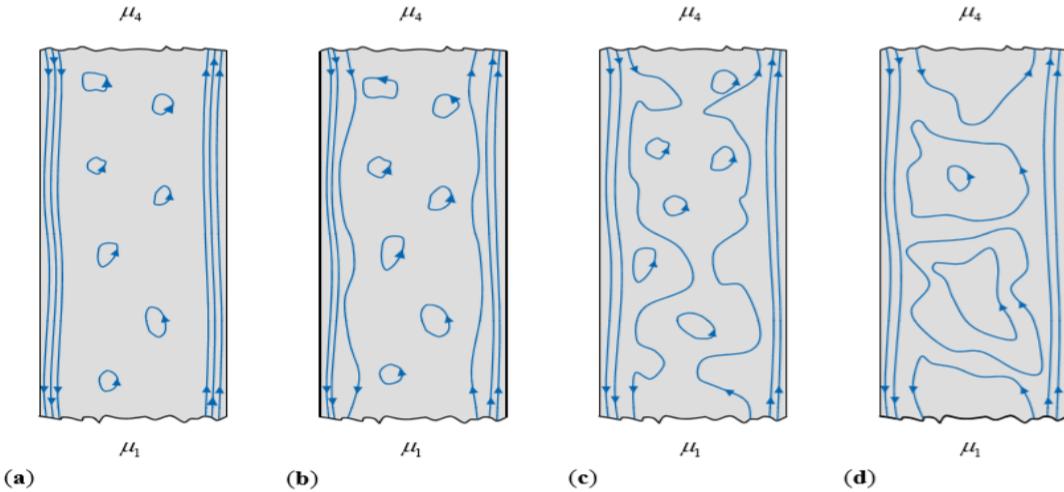


Figure 6: Das Randkanalmodell unter Störpotentialen und verschiedenen B-Feldern.

bei Zunahme des B-Felds ( von a) nach d) ) sich die Kanäle verändern. Da wir in a) nur 3 Randkanäle beobachten, die zur widerstandsfreien Leitung beitragen, muss die Fermi-Energie zwischen dem 3. und 4. Landau-Niveau liegen, wobei es hier zu den Minima in den Shubnikov-de Haas-Oszillationen und den Plateaus im Hallwiderstand kommt. Die Zustände im Inneren tragen nicht bei. Mit steigendem Magnetfeld wandern die innersten Kanäle ins Innere (siehe b)) bis es sogar zu Rückstreuereffekten kommt ( siehe c )). Anschließend befindet sich die Fermi-Energie bei genügend

hohem B-Feld zwischen dem 2. und 3. Landau-Niveau und der innerste Kanal ist in ein lokalisierten Zustand aufgebrochen (siehe c)). Dadurch existieren über die gesamte Probe kontinuierliche, erlaubte Zuständen, über welche die Elektronen von Rand zu Rand streuen können. Man misst ein Maximum im Längswiderstand der Probe und er wird umso größer je mehr Kanäle aufbrechen und nicht mehr zum widerstandsfreien Ladungstransport beitragen.

Der QHE ist also ein Produkt der Unreinheiten einer Probe. Der QHE ist umso schwächer ausgeprägt, wenn sowohl die Probe wenige Störstellen mit hohen Beweglichkeiten aufweist, als auch bei zu vielen Störstellen.

## 5 Fraktionaler Quanten-Hall-Effekt

Wie bereits erwähnt, werden die integralen Hall-Plateaus weniger ausgeprägt bei "reineren" Proben. Trotz allem tauchen jedoch neue Plateaus auf bei noch höheren Magnetfeldern und tieferen Temperaturen, die sich bei Füllfaktoren von ganzzahligen Brüchen wiederfinden:

$$\nu = \frac{n}{m} \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z} \quad \text{und } m \text{ ungerade.} \quad (22)$$

Tsui und Störmer entdeckten dieses Phänomen im Jahre 1982, wobei sie AlGaAs/GaAs-Proben genutzt haben. Die gemessenen Widerstände sind in Abb. zu sehen. Das erste zusätzliche Plateau, das beobachtet wurde, war bei  $\nu = 1/3$ . Allgemein für  $\nu < 1$  ist nur noch das unterste Landau-Niveau bevölkert, jedoch nicht vollständig. Um diese Phänomene nun zu beschreiben und zu erklären, reicht die Einteilchen-Näherung nicht mehr aus, sondern muss von einem wechselwirkenden Vielteilchen-System ausgehen. Man bezeichnet so ein korreliert bewegendes System unter solchen Bedingungen als Quantenflüssigkeit, die inkompressibel und superfluid ist, was das Verschwinden des Längswiderstands erklärt.

Einer der Theorien, die von Laughlin entwickelt wurde, ist der Ansatz über eine Wellenfunktion dieses Vielteilchensystems, die er numerisch löste durch Variationsrechnungen. Die Anregungen dieses sogenannten Laughlin-Zustandes (Grundzustand) sind Quasi-Elektronen und Quasi-Löcher, die bruchzahlige Ladungen  $e_{\text{eff}} = e/m$  tragen.

Eine andere Erklärung, dessen Betrachtungsweise von J. K. Jain stammt, ist das Modell der "Composite Fermions". Dazu betrachtet man die Magnetooszillationen des Längswiderstandes. Diese Teilchen sind zusammengesetzt aus einem Elektron und zwei magnetischen Flussquanten. Das äußere B-Feld wird von diesem Teilchen effektiv als verschwindend wahrgenommen. Das Feld wird dazu genutzt um zwei Flussquanten für jedes Elektron bereitzustellen. Das Erhöhen des B-Feld bewirkt dann das Einbringen eines zusätzlichen Flussquants. Bei  $\nu = 1/3$  haben wir also ein zusätzlichen Flussquant pro "composite" Fermion. Das wiederum entspricht aber dem Füllfaktor  $\nu = 1$  für normale Elektronen. Damit lässt sich zeigen, dass  $\nu = 2/5, 3/7, 4/9...$  den Füllfaktoren  $2, 3, 4...$  entspricht. Bei kleineren Magnetfeldern fehlt dann jeweils ein Flussquant pro "composite" Fermion bei  $\nu = 1$ , pro 2 dieser Teilchen bei  $\nu = 2/3$ , pro 3 dieser Teilchen bei  $\nu = 3/5$  usw. Analog lässt sich das Konzept übetragen auf geradzahlige Nenner und ist mit der Laughlin-Theorie gut vereinbar.

Beide dieser Theorien sind bisher jedoch nicht experimentell bewiesen worden und sind auch noch heute Gegenstand aktueller Forschung.

## 6 Die Folgen der Entdeckung des QHE

Der QHE hat vor allem großen Nutzen in der Metrologie gefunden zur Untersuchung von Materialien, was damit zu tun hat, dass die Plateaus als Funktion von Elektronendichte und/oder Magnetfeld flach verlaufen und der quantisierten Hallwiderstand immer den fundamentalen Wert  $h/e^2$  trägt, welcher weder von Probengeometrie noch Probenmaterial abhängt, was wiederum die Größe exakt reproduzierbar macht. Auf Grund dessen wird die Von-Klitzing-Konstante  $R_K$  seit dem 1.1.1990 als Widerstandsnorma verwendet:  $R_K = 25812,807 \Omega$  und ist mit heutigen Messmethoden mit einer relativen Unsicherheit von  $10^{-10}$  bestimmt. Dies ermöglichte selbstverständlich eine weitere physikalische Einheit auf elementare Naturkonstanten zurückzuführen.

Weiterhin wurde der QHE auch in Graphen beobachtet, was die 2-Dimensionalität dieses Stoffes beweist.

Von-Klitzing sah in seiner Publikation die Möglichkeit die Feinstrukturkonstante äußerst genau zu bestimmen. Denn diese ist gegeben durch:

$$\alpha = \frac{1}{2c\epsilon_0} \frac{e^2}{h} = \frac{1}{2c\epsilon_0} \frac{1}{R_K} \quad (23)$$

Das bedeutet die Messunsicherheit von  $\alpha$  hängt nur von der Messunsicherheit der Klitzing-Konstante ab. Dies kann dazu benutzt werden um die Werte für die Feinstrukturkonstante die von der QED und Festkörperphysik stammen, zu vergleichen. Im Stand der Publikation von Klitzing im Jahre 1980, stimmen die Werte innerhalb einer Abweichung der Größenordnung  $10^{-7}$  überein.

## Quellenverzeichnis

- [1] Rudolf Gross. *Festkörperphysik*. De Gruyter Verlag.
- [2] Siegfried Hunklinger. *Festkörperphysik*. De Gruyter Verlag.
- [3] Shosuke Sasaki. *Theory of the integer and fractional quantum Hall effects*. Nova Publishers.
- [4] K. v. Klitzing G. Dorda M. Pepper. New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance. *Physical Review Letter*, 45:494, 1980.
- [5] G. Abstreiter. Die Entdeckung des fraktionalen Quanten-Hall-Effekts. *Physikalische Blätter*, 54, 1998.
- [6] R. B. Laughlin. Anomalous Quantum Hall Effect: An Incompressible Quantum Fluid with Fractionally Charged Excitations. *Physical Review Letter*, 50:1395, 1983.
- [7] Jürgen Weiß Rolf Gerhardts. 25 Jahre Quanten-Hall-Effekt. *Physik Journal*, (6):37–44, 2005.
- [8] David Tong. Lectures on the quantum hall effect. <https://arxiv.org/abs/1606.06687>.
- [9] FP-Praktikumsanleitung QHE Uni Giessen. [http://www.uni-giessen.de/fbz/fb07/index\\_html/physik/lehre/fprak/anleitungen/quantenhall](http://www.uni-giessen.de/fbz/fb07/index_html/physik/lehre/fprak/anleitungen/quantenhall).
- [10] FP-Praktikumsanleitung QHE Uni München. [https://www.nano.physik.uni-muenchen.de/nanophotonics/assets/pdf/f1/K1\\_QHE\\_instructions\\_english.pdf](https://www.nano.physik.uni-muenchen.de/nanophotonics/assets/pdf/f1/K1_QHE_instructions_english.pdf).